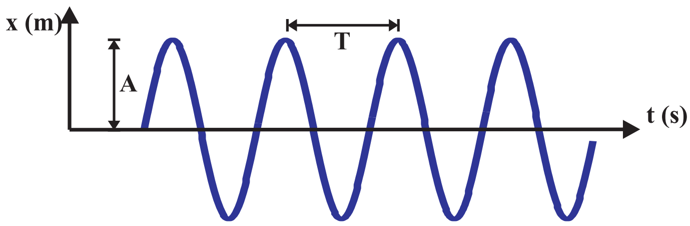
4.4 Tidsberoende krafter: oscillerande rörelse

Många olika ting i naturen är *periodiska*: årstiderna, ljudvågorna, klockorna osv. En pendel som rör sig fram och tillbaka kan vi säga att pendlar (eng. oscillates). En gemensam faktor för alla periodiska rörelser, är att de har en stabil jämviktsposition dit kraften alltid pekar ifall systemet har rubbats.



Figur 23: En våg med amplituden A och perioden T.

För periodisk rörelse har olika storheter getts följande benämningar:

- **amplitud, A :** Maximiförskjutning (m) eller maximiavståndet från jämviktspositionen
- **cykel :** Ett helt kretslopp för systemet
- **Perioden, T :** Tiden (s) för systemet att göra ett helt kretslopp eller cykel
- **Frekvens, f :** Antal cykler per sekund (f=1/T), 1 hertz = 1 Hz = 1 cykel/s = 1 s^{-1}
- **Vinkelfrekvens, ω :** Vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi f$ rad/s
- **Fasvinkel ϕ :** Fasvinkeln (rad) som säger oss vid vilken punkt oscillerande rörelse är vid tidpunkten noll

4.4.1 Simpel harmonisk rörelse

När kraften för ett system är proportionellt till negativa värdet av förskjutningen från jämviktspositionen får vi simpel harmonisk rörelse. En fjäder uppför sig på detta sätt, där fjäderns kraft som en funktion av förskjutningen x kan skrivas som

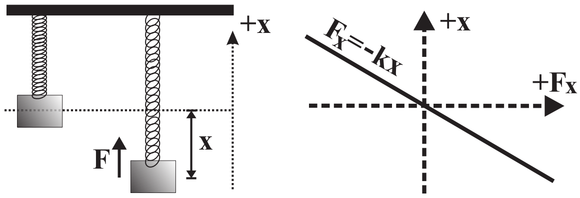
$$\boxed{F_x = -kx} \tag{113}$$

där k (N/m) är fjäderkonstanten. Lagen kallas för **Hookes lag**. Ju 'starkare' fjäder, desto större värde har k.

Newtons andra lag: $F = ma$ ger rörelseekvationen för objektet som hänger i fjädern[13]

$$F_x = -kx \quad = \quad ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

[13] Fjäderns massa måste vara mycket mindre än objektets massa. Hur kunde man ta med fjäderns massa i beräkningen?



Figur 24: Ett objekt påverkas av en tidsberoende fjäderkraft som följer Hookes lag.

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{114}$$

En lösning till denna differentialekvation kan vi få genom prövning. Vi gör ansatsen att förflyttningen x som en funktion av tiden t är av formen[14]

$$x = Asin(\omega t + \phi) \tag{115}$$

Vi deriverar två gånger

$$\frac{dx}{dt} = \omega Acos(\omega t + \phi) \tag{116}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 Asin(\omega t + \phi) \tag{117}$$

och sätter resultatet in i rörelseekvationen, Ekv. (114)

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x &= -\omega^2 Asin(\omega t + \phi) + \frac{k}{m}Asin(\omega t + \phi) = 0 \\ \Rightarrow \qquad & Asin(\omega t + \phi)\left[-\omega^2 + \frac{k}{m}\right] = 0 \end{aligned} \tag{118}$$

Vilket stämmer för alla tider t bara ifall parametern ω uppfyller vilkoret

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{119}$$

ω kallas för vinkelhastigheten eller vinkelfrekvensen för rörelsen och ges av

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \tag{120}$$

Parametern A, Ekv. (115), ger maximiförflyttningen, och ϕ fasvinkeln som bestämmer vad x är vid tiden noll. Rörelseekvationen, hastigheten och accelerationen för simpel harmonisk rörelse kan sammanfattas med ekvationerna:

[14] Anta att lösningen är en oändlig serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ och sätt den in i differentialekvationen.

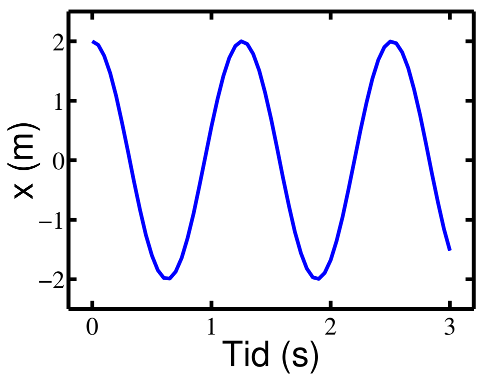
$$\boxed{\begin{aligned} x(t) =& \quad\quad Asin(\omega t+\phi) \\ v(t) =& \quad \omega\ Acos(\omega t+\phi) \\ a(t) =& -\omega^2 Asin(\omega t+\phi) \end{aligned}}$$

där ωt och fasvinkeln ϕ ges i radianer. Frekvensen för rörelsen är $f = \omega/2\pi$, vilket ger **perioden**

$$\boxed{T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}} \tag{121}$$

Besök: www.ph.biu.ac.il/$\sim$ rapaport/java-apps/index.html

Exempel: Bestäm utgående från den nedre bilden **amplituden** A, **vinkelhastigheten** ω, **fasvinkeln** ϕ och **frekvensen** f



Amplituden: A = $\underline{\underline{\text{2 m}}}$

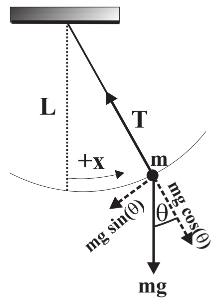
Perioden: T ≈ 2.5 - 1.2 s = 1.3 s ⇒ Frekvensen: f ≈ 1/1.3 s ≈ $\underline{\underline{0.77\ s^{-1}}}$

vinkelhastigheten ω = 2πf ≈ 2·3.14· 0.77 ≈ $\underline{\underline{\text{4.84 rad/s}}}$ (5 är rätt)

fasvinkeln ϕ: Vid t=0 är ekvationen: $x(0)$ = 2 m = $Asin(\phi)$ = 2 m $sin(\phi)$
⇒ ϕ = $asin(1)$ ≈ $\underline{\underline{1.5708}}$ (= $\pi/2 \mathrel{\hat{=}}$ 90°)

4.4.2 Simpel pendel

I bilden nedan har vi ritat kraftdiagrammet för en simpel pendel med längden L, där T (eng. tension) står för trådens spänningskraft på massan m.



Vi ser att den återställande kraften som en funktion av vinkeln Θ är $F_\Theta = -mg \cdot sin(\theta)$, vilket inte är proportionellt till θ. Men ifall θ är liten, är approximationen sin(θ) $\approx \theta$ mycket bra och vi får (se Ekv. (24): $x = \theta \cdot L$)

$$F_\theta \approx -mg\theta = -mg\frac{x}{L} = -\frac{mg}{L}x \tag{122}$$

vilket ger rörelseekvationen för simpel harmonisk rörelse med vinkelfrekvensen, se Ekv. (120) där k ersätts med mg/L

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}}} \tag{123}$$

vilket bara beror av pendelns längd. Dessa ekvationer stämmer bara för små pendelamplituder. Motsvarande frekvens och period för pendeln blir

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} && (124) \\ T &= \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} && (125) \end{aligned}$$

Exempel: Vad är perioden och frekvensen för en simpel pendel som är 1.000 m lång som befinner sig vid en plats med g = 9.830 m/s^2?
Vi får att frekvensen och perioden blir

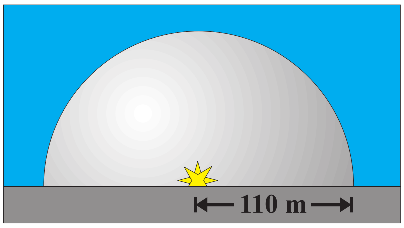
$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.830\ m/s^2}{1.000\ m}} \approx \underline{\underline{0.499\ Hz}} && (126) \\ T &= \frac{1}{f} \approx \underline{\underline{2.004\ s}} && (127) \end{aligned}$$

Med perioden nästan exakt två sekunder. När det metriska systemet började användas, definierades en sekund som hälften av perioden för en meter lång pendel.[15]

[15] Var detta en bra definition på sekunden? Vilka nackdelar har denna definition?

4.5 Dimensionsanalys

Exempel: Anta att man filmar en atombombssprängning som görs på markytan. Bilden nedan visar hur den halvsfäriska sprängningsfronten, radien 110 m, ser ut 15 ms efter sprängningen.



Approximera hur mycket explosionsenergi atombomben hade.

Problemet verkar vara helt omöjlig att lösa, för inte vet vi hur luften påverkas av explosionen, eller hur snabbt chockvågen breder ut sig. Vi skall nu använda dimensionsanalys, vilket Amerikanen G. I. Taylor gjorde då han till myndigheternas häpnad beräknade den frigjorda energin i en atombombsexplosion från en film gjord av explosionen.

Han gjorde de logiska antaganden att chockvågens radie, $[r]$=m, efter sprängningen beror av:

- Den frigjorda energin, $[E]$ = J = kg·m^2/s^2
- Tiden efter sprängningen, $[t]$ = s
- Luftens densitet, $[\rho]$ = 1.293 kg/m^3

vilket ger ekvationen för chockvågens radie

$$r = f(E, t, \rho) = K \cdot E^a \cdot t^b \cdot \rho^c$$

där han approximerade konstanten K från chockvågsteorin till 1. heltalen a, b och c skall vi nu bestämma via dimensionsanalys.

Tittar vi nu på ekvationen från enheterna sett, blir den

$$\begin{aligned} m = \left(\frac{kg \cdot m^2}{s^2}\right)^a (s)^b \left(\frac{kg}{m^3}\right)^c &= (kg^a \cdot kg^c)(m^{2a} \cdot m^{-3c})(s^{-2a} \cdot s^b) \\ \rightarrow \quad kg^0 \cdot m^1 \cdot t^0 &= kg^{a+c} \cdot m^{2a-3c} \cdot s^{b-2a} \end{aligned}$$

Vi ser nu att på vänstra sidan av funktionen har vi inga kg (kg^0), vilket funktionens högra också ger ifall likheten: $a + c = 0$ gäller. Vi får alltså att $a = -c$, vilket vi insätter i den andra termen i funktionens högra sida för att ge den rätta enheten m

$$m^1 = m^{2a-3c} = m^{-2c-3c} = m^{-5c} \qquad \rightarrow \qquad c = -1/5 \rightarrow a = 1/5$$

Den sista ekvationen med tiden ger likheten: $b = 2a = 2/5$. Ekvationen för radien är alltså: $r = E^{1/5} t^{2/5} \rho^{-1/5}$, vilket ger ekvationen för den totala energin:
$E^{1/5} = r\rho^{1/5}/t^{2/5}$, vilket i kortare form ger (+ insättning)

$$E \approx \frac{r^5 \rho}{t^2} \approx \frac{(110\ \text{m})^5 1.293\ \text{kg/m}^3}{(15 \times 10^{-3}\ \text{s})^2} \approx \underline{\underline{1.4 \times 10^{12}\ \text{J}}}$$

4.6 Ljudets hastighet

Ljudets hastighet i luft är nära 340 m/s. I fasta ämnen och vätskor är hastigheten vanligen mycket större, oftast mera än 1000 m/s. I vissa fasta ämnen t.o.m. nära 10000 m/s. Ljudets hastighet beror på olika faktorer, växelverkningen mellan atomerna och atomernas massa. Härleder man ekvationen, får man att ljudets hastiget ges ungefär av

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}d \tag{128}$$

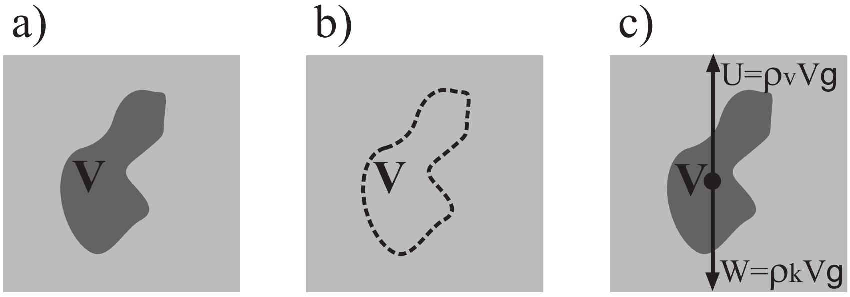
där k är fjäderkonstantenför den interatomära kraften (antas vara lineär med avståndet: $F = k\Delta x$), m är massan för atomen och d är avståndet mellan atomerna.

4.7 Archimedes princip

Då en kropp nedsänks i en vätska, undantränger den vätska, och känner en lyftkraft från vätskan omkring den. Att beräkna denna lyftkraft från kroppens form och trycket från vätskan på olika djup, är extremt svårt. Ett tankeexperiment kan dock användas för att bestämma lyftkraften på ett oregelbundet föremål.

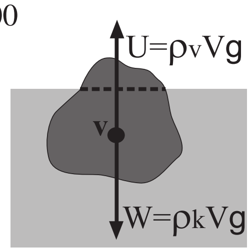
1. Vi sänker en godtycklig kropp med volymen V i vatten, se **a)** figuren nedan. Kroppen känner två krafter; vikten $W = mg = \rho_k V g$ och en ännu obestämd lyftkraft betecknat med U från vattnet.
2. Anta att kroppen tas nu bort, och det kvarblivna tomrummet fylls med vatten av samma form och volym, bild **b)**. Eftersom det insatta vattnet står stilla, måste lyftkraften U på denna volym och form vara lika med vikten på detta vatten $U = W_v = m_v g = \rho_v V g$.
3. Nu kan kroppen igen sättas på sin plats utan att lyftkraften ändras, och den totala kraften på kroppen är, **c)**:

$$F_{tot} = U - W = \rho_v V g - \rho_k V g = V g(\rho_v - \rho_k) \tag{129}$$



En kropp sjunker alltså i vätska ifall dess densitet är större än vätskans. Man kan nu minska på en kropps uppenbara densitet genom att forma kroppen som en båt så att den flyter, fastän båten skulle vara gjord av stål med nästan åtta gånger större densitet än vatten.

Exempel: Ett isberg flyter på havet. Beräkna hur stor del av isbergets volym är under vattenytan. Isens densitet ρ_i = 917 kg/m^3 och vattnets ρ_v = 1000 kg/m^3.



Vikten neråt är samma som förut, men eftersom volymen nedsänkt i vatten nu är v blir den totala kraften på isberget

$$F_{tot} = U - W = \rho_v v g - \rho_i V g = g(\rho_v v - \rho_i V)$$

Detta skall vara noll för att isberget skall stå stilla, vilket ger volymen nedsänkt i vattnet

$$v = \frac{\rho_i}{\rho_v} V$$

vilket ger att förhållandet mellan totala och den nedsänkta volymen är

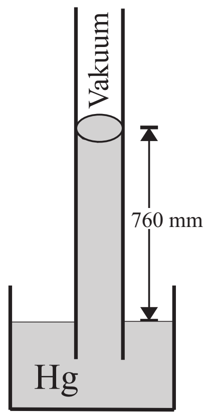
$$\frac{v}{V} = \frac{\rho_i}{\rho_v} = \frac{917 \text{ kg/m}^3}{1000 \text{ kg/m}^3} = \underline{\underline{91.7\%}}$$

4.8 Gasernas tryck

Jordens gravitationsfält gör att luften eller jordens atmosfär inte försvinner ut i rymden. Atmosfären har inte homogen densitet, utan lufttrycket ökar ju närmare jordytan vi kommer. Tryckökningen ges av ΔP = $\rho(y)g(\Delta y)$, där y är höjden över jordytan. Trycket vid jordytan ges då som en integral

$$\boxed{P_{jordyta} = g \int_0^\infty \rho(y) dy} \qquad (130)$$

Exempel: Man märkte snabbt att man kan suga upp vätska genom ett smalt rör ('naturen avskyr vakuum', 'nature abhors vacuum'). Häpnaden blev sedan stor då man upptänkte att det går bara att suga upp vätska till en viss höjd, inte högre. Förklara varför det går bara att suga vätska till en viss höjd. Beräkna lufttrycket på jordytan från experimentet där den maximala höjden som kvicksilver går att suga upp är 760 mm över kvicksilverytan. Kvicksilvers densitet ρ är 13.6×10^3 kg/m^3.



Trycket i den nedre ändan av kvicksilverröret är

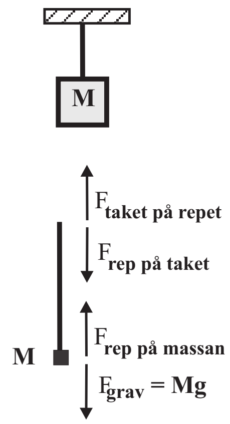
$$P_{Hg} = \rho_{Hg} g \Delta y \approx 13.6 \times 10^3 \text{kg/m}^3 9.8 \text{ m/s}^2\ 0.76 \text{ m}$$
$$\approx 10^5 \frac{\text{kgm}}{\text{m}^2\text{s}^2} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \underline{\underline{10^5 \text{ Pa } (\approx 1 \text{ atm.})}}$$

5 Rörelsemängdsförändring

5.1 Konstant rörelsemängd (Statik)

Ett viktigt specialfall med konstant rörelsemängd är situationen då kroppen skall stå stilla. För att detta skall hända måste summakraften på kroppen vara noll, så att $d\vec{p}/dt = \vec{F_{tot}} = 0$.

Exempel: Massan *M* hänger i ett masslöst rep (se figuren) Bestäm kraften på massan som repet åstadkommer. Vad är spänningskraften på repet vid högsta punkten?



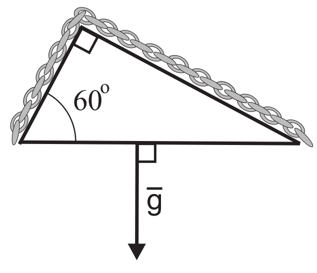
Gravitationskraften på massan är *Mg* nedåt. Eftersom massan står stilla, ger Newtons första lag att summakraften på massan är lika med noll $\Rightarrow$ kraften på massan som repet åstadkommer är *Mg* uppåt

Spänningskraften på repet vid högsta punkten är samma som kraften på repet som taket åstadkommer = *Mg* uppåt

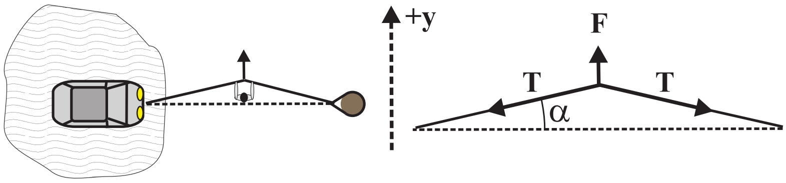
Hur ändrar situationen ifall repets massa inte är försumbar? Anta att repets massa är *m*.

Gravitationskraften på massan är fortfarande *Mg* nedåt, och spänningskraften på repets nedre del är också *Mg*. Spänningskraften vid repets högsta punkt är nu *(M+m)g*.

Exempel: Betrakta bilden till höger: Ifall kedjan kan röra sig friktionsfritt, så kommer den att glida till vänster eller höger, eller kommer den att stå stilla? Enda krafterna som påverkar kedjan är gravitationskraften g och normalkrafterna från triangeln. Se svar i Appendix B



Exempel: En man vars bil har fastnat i lera försöker ensam dra upp bilen med ett rep. Nära till bilen finns ett stort träd. Hur skall mannen göra för att maximera dragkraften på bilen?



Han bör fästa ena repändan på bilen och andra ändan runt trädet. Sedan skall han trycka vinkelrät mot repet. Vi beräknar vad är kraften på bilen ifall vinkeln α i figuren är 5° och kraften F = 1000 N.

Vi ser att spänningskrafterna i repen är lika, $|T_1| = |T_2|$ som vi kallar för $|T|$

y-komponenterna för krafterna blir:

$$\begin{aligned} F_y &= F \\ T_{1y} &= -T \cdot sin(\alpha) \\ T_{2y} &= -T \cdot sin(\alpha) \end{aligned}$$

Och för systemet i jämvikt får vi att

$$F_y + T_{1y} + T_{2y} = F - 2T \cdot sin(\alpha) = 0$$

vilket ger att kraften på bilen blir[16]

$$T = \frac{F}{2sin(\alpha)} = \frac{1000\text{ N}}{2sin(5 \cdot \pi/180)} \approx \underline{\underline{5740\text{ N } (\sim 590\text{ kg !})}}$$

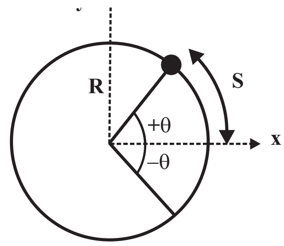
Observera att då vinkeln α ökar, blir dragkraften på bilen mindre, och man måste spänna repet på nytt igen. Det man vinner i kraft, förlorar man i väg.

5.2 Cirkelrörelse

När en kropp befinner sig i cirkelrörelse, måste en radiell acceleration finnas. Denna acceleration kallas vanligen för centripetalacceleration (centripetal, grekiska, för centrum sökande). Vi beskriver cirkelrörelsen med vinkeln θ. $[\theta]$ = rad, θ = S/R, där S är segmentets längd och R är cirkelns radie. Motsvarande *vinkelhastighet* och *vinkelacceleration* blir då

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{S}{R} = \frac{1}{R}\frac{dS}{dt} = \frac{v}{R} \\ \alpha &= \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}$$

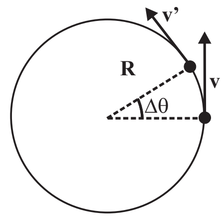
[16] $360° \equiv 2\pi \Rightarrow 1° \equiv \pi/180$



5.2.1 Cirkelrörelse med konstant tangentiell hastighet

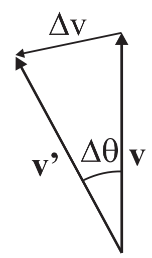
I cirkelrörelse med konstant tangentiell hastighet ändras hastighetens riktning hela tiden, vilket betyder att accelerationens riktning också ändras. Detta gör problemet svårare än för projektilrörelsen, där gravitationsaccelerationen var riktad nedåt hela tiden.
Ifall vinkeln $\Delta\theta$ i bilden är liten, får vi att

$$\Delta\theta \approx sin(\Delta\theta) \approx \frac{\Delta v}{v}$$



där $\Delta\theta$ kan approximeras till $d\theta$ när vinkeln blir mycket liten och storleken på hastighetsändringen blir

$$dv = |v| \cdot d\theta$$



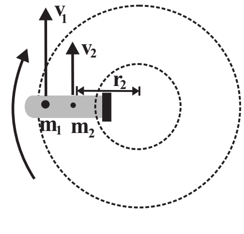
Vi får då att den *radiella accelerationen* för att hålla kroppen i cirkelrörelse blir

$$a_{rad} = \frac{dv}{dt} = v\frac{d\theta}{dt} = v \cdot \omega = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

där riktningen alltid är mot centrum, och centripetalaccelerationen kan slutligen skrivas som

$$\boxed{\mathbf{a}_c = -\frac{|v|^2}{R}\hat{r} = -\omega^2 R\,\hat{r} \qquad (131)}$$

Exempel: I bl.a. kemi och biologi använder man en **centrifug** för att separera partiklar eller molekyler med olika massa. Idén är att partiklarna i en vätskefylld tub roterar. Partiklarna blir sedan i den bana med radien r, där centripetalkraften mv^2/r motsvarar den motkraft som vätskan upprätthåller. Vid höga hastigheter och långa tider, så kan inte vätskan helt upprätthålla motkraften och resultatet blir att partiklarna sakta driver mot tubens botten och *sedimenteras* där.



5.2.2 Cirkelrörelse med icke konstant tangentiell hastighet

Ifall den tangentiella hastigheten för cirkelrörelse inte är konstant, kan vi spjälka upp den totala accelerationen i en radiell och tangentiell del

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \quad och \quad a_{tan} = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \tag{132}$$

Detta kan också ges i vektorform följande:

$$\mathbf{a} = R\alpha\hat{t} - \omega^2 R\hat{r} \tag{133}$$

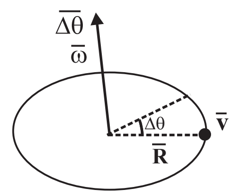
där $\hat{t}$ och $\hat{r}$ är enhetsvektorer i tangentiell, respektive radiell riktning.

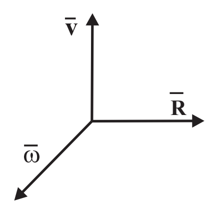
5.2.3 Vinkelstorheterna som vektorer: kryssprodukten

För att lättare få riktningarna på olika vinkelstorheter, definierar vi att vinkeln θ och vinkelhastigheten ω är vektorer vars riktning är vinkelrät till rotationsplanet. Detta ger hastigheten för cirkelrörelse som

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \mathbf{R} = \vec{\omega} \times \mathbf{R} \tag{134}$$

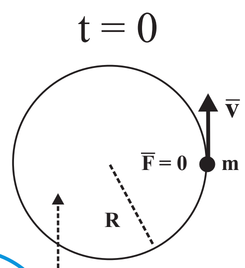
Fördelen med detta är att riktningen på hastigheten v är direkt given, inga andra regler behövs.



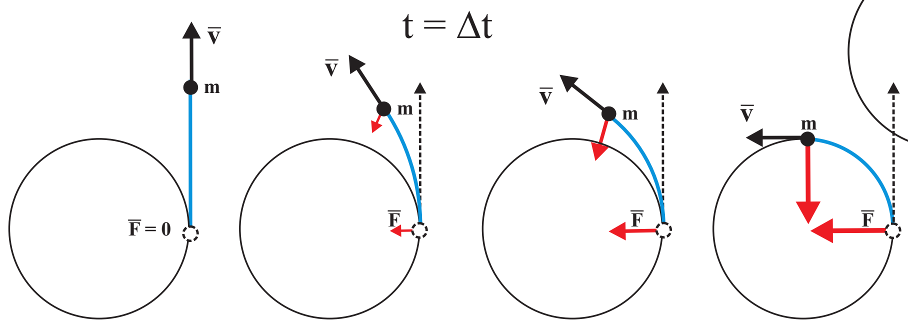


5.3 Cirkelrörelsens dynamik

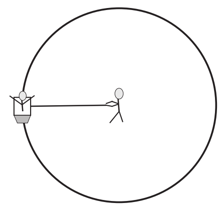
I figuren bredvid ser vi en partikel med massan m som rör sig rakt uppåt med hastigheten v vid tidpunkten $t = 0$.



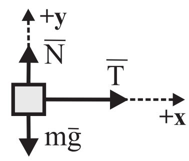
Nedan ser vi hur partikelns rörelse har ändrat för fyra olika storlekar på en kraft mot cirkelns mitt (centripetalkraft). För $F = 0$ är partikelns hastighet oförändrad. Ju större centripetalkraften är ju mera krökt blir partikelns bana. Då centripetalkraften får storleken: $F = m\frac{v^2}{R}$, blir partikelns bana exakt en cirkel med radien R.



Exempel: En energetisk far sätter sitt barn (25 kg) att sitta i en släde som väger 5 kg. Mellan släden och fadern har vi ett rep. Avståndet mellan släden och fadern är 4.0 m (rep + armarna). Fadern snurrar nu barnet runt i en ring. Vad är den största farten som släden kan få ifall maximikraften som fadern kan hålla är 500 N? Hur många varv per minut snurrar barnet? Vilka krafter verkar på släden? Anta att ingen friktion finns mellan släden och snön (bra approximation).



Kraftdiagrammet och summa kraftkomponenterna blir:



$$
\begin{aligned}
x: \sum F_x &= T = m\frac{v^2}{R} \\
y: \sum F_y &= N - mg = 0 \Rightarrow N = mg
\end{aligned}
$$

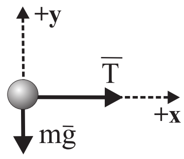
Hastigheten blir:

$$
\begin{aligned}
v = \sqrt{\frac{RT}{m}} &\approx \sqrt{\frac{4 \text{ m } 500 \text{ N}}{30 \text{ kg}}} \\
&\approx \sqrt{\frac{4 \text{ m } 50 \text{ kgm/s}^2}{3 \text{ kg}}} \approx \underline{\underline{8.165 \text{ m/s } (\approx\ 29 \text{ km/h})}}
\end{aligned}
$$

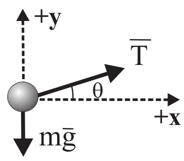
På en minut går släden en sträcka: 8.165 m/s · 60 s, och antal varv/minut blir

$$
\frac{8.165 \cdot 60}{2 \cdot \pi \cdot 4} \approx \underline{\underline{19.5 \text{ varv/min}}}
$$

Exempel: David placerar en 2 kg tung sten i ändan av ett rep som är 1.5 m långt (stenslunga) Han börjar rotera stenen över sitt huvud. Vad är farten med vilken stenen slungas iväg ifall spänningskraften i repet just innan stenen lämnar slungan är 200 N?



I övre bilden till höger ser vi ett felaktigt kraftdiagram på problemet.



I rätt kraftdiagram bildar spänningskraften en vinkel θ med marken, så att vikten på stenen mg kan balanseras av spänningskraftens y-komponent.

Kraftkomponenterna blir:

$$\begin{aligned} x:\ \sum F_x &= Tcos(\theta) = m\frac{v^2}{R} \\ y:\ \sum F_y &= Tsin(\theta) - mg = 0 \ \Rightarrow\ sin(\theta) = \frac{mg}{T} \end{aligned}$$

Vinkeln mellan spänningskraften och marken blir

$$\theta = sin^{-1}\left(\frac{2\text{ kg } 9.8\text{ m/s}^2}{200\text{ N}}\right) \approx \underline{\underline{0.0982\text{ rad } (\approx\ 5.6^\circ)}}$$

Rotationsradien $R = Lcos(\theta)$, där L är slungans längd, vilket ger hastigheten för stenen då den lämnar slungan:

$$v = \sqrt{\frac{RTcos(\theta)}{m}} = \sqrt{\frac{Tcos^2(\theta)L}{m}} \approx \underline{\underline{12.189\text{ m/s } (\approx\ 44\text{ km/h})}}$$