2.3.2 Projektilrörelse med luftmotstånd

En mera realistiskt beskrivning av projektilrörelsen får vi när vi tar i beaktande luftmotståndet som vanligtvis är beroende av projektilens fart.

Luftmotståndet för ett objekt som rör sig i luft- eller vätskelikt medium beror på kroppens form, yta, area och hastighet, men också av mediets densitet och viskositet.

Först måste man bestämma kroppens hastighetsberoende på luftmotståndet. Detta kan man åstadkomma med det så kallade **Reynolds talet**, vilket egentligen ger förhållandet mellan den *inertiella* och *viskosa*[10] kraften på kroppen.

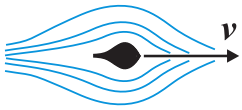
$$\boxed{R_e = \frac{L \cdot \rho \cdot v}{\eta}} \tag{85}$$

där,

$$\begin{aligned} R_e &= \text{Reynolds tal, dimensionslöst} \\ L &= \text{Kroppens längd (m) i riktning av hastigheten} \\ \rho &= \text{Mediets densitet (kg/m}^3\text{)} \\ v &= \text{Hastigheten av kroppen (m/s)} \\ \eta &= \text{Mediets dynamiska viskositet (N s } /m^2 \text{ = kg / (s} \cdot \text{ m))} \end{aligned}$$

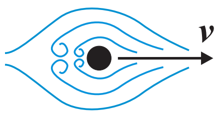
För små värden av *Reynolds talet*, vilket kallas för *laminart* eller icke-turbulent flöde, så är luftmotståndet bara proportionellt till hastigheten

$$F_{lm} = k \cdot v \qquad Re < 1 \tag{86}$$



där k är proportionalitetsfaktorn (kg/s). När *Reynolds talet* är stort, turbulent flöde, så är luftmotståndet proportionellt till hastigheten i kvadrat

$$F_{lm} = C_{lm} \frac{A \cdot \rho \cdot v^2}{2} \qquad Re > 1000 \tag{87}$$



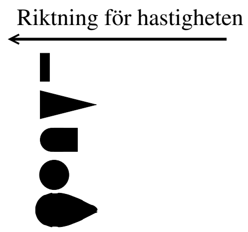
där

$$\begin{aligned} F_{lm} &= \text{Luftmotståndskraften (N = kg m / s}^2\text{)} \\ C_{lm} &= \text{Luftmotståndskoefficienten, dimensionslöst} \\ A &= \text{Kroppens area (m}^2\text{) vinkelrät mot hastigheten} \\ \rho &= \text{Mediets densitet (kg/m}^3\text{)} \\ v &= \text{Hastigheten för kroppen (m/s)} \end{aligned}$$

[10]**Viskositet:** Storlek på flödesresistansen som en vätska ger.

Luftmotståndskoefficienten C_{lm} beror på projektilens form, area och yta. Nedan finns en tabell med luftmotståndskoefficienter för några av de vanligaste projektilerna:

Projektil	C$_{lm}$
Platta	1.28
Prisma	1.14
kula	0.295
sfär	0.07 - 0.5
'utsträckt droppe'	0.045



För bollar, människor och många andra objekt kan Luftmotståndskoefficienten C_{lm} approximeras vara ca. 0.35. Detta tillsammans med luftens densitet $\rho \approx 1.2$ kg/m^3 ger att hastigheten i kvadrat beroende luftmotståndskraften blir

$$F_{lm} \approx \frac{0.35 \cdot 1.2}{2} A \cdot \ v^2 \approx \frac{1}{4} A \cdot \ v^2 \tag{88}$$

där A är arean för objektet vinkelrät mot hastigheten v. Denna approximativa formel som är lätt att komma ihåg stämmer ganska bra för stora rundformiga objekt i luft som inte har allt för hög hastighet.

2.3.3 Numerisk lösning av kaströrelse med luftmotstånd

Vi antar att *retardationen* (negativ acceleration) för luftmotståndet kan skrivas följande

$$\mathbf{F_{lm}} = -konst \cdot v^2. \tag{89}$$

Vi har gravitationskraften i -y riktning så att de totala x- och y-komponenterna av krafterna blir

$$\begin{aligned} F_{Tot,x} &= F_{lm} \cdot cos(\alpha) \\ F_{Tot,x} &= F_{lm} \cdot sin(\alpha) - mg \end{aligned}$$

där $\alpha = atan(v_y/v_x)$. Dessa krafter beror av den momentana hastigteten, så att vi använder rörelsemängdsprincipen $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_{Tot}$ i finit form: $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{F}_{Tot}\Delta t$. Detta ger rörelsemängdsförändringen i x- och y-riktningarna:

$$p_{2,x} = p_{1,x} + F_{Tot,x}\Delta t \tag{90}$$
$$p_{2,y} = p_{1,y} + F_{Tot,y}\Delta t \tag{91}$$

Nu går vi igenom ett sätt på hur man numeriskt med hjälp av en dator kan lösa problemet (datorsimulation)

- Vi ger begynnelseplatsen, x=x$_\circ$, y=y$_\circ$, begynnelsehastigheten v=v$_\circ$ och begynnelsevinkeln $\alpha = \alpha_\circ$ för projektilen
- Vi beräknar x- och y-komponenterna för begynnelsehastigheten
  $v_x = v_\circ cos(\alpha)$
  $v_y = v_\circ sin(\alpha)$
- Vi beräknar begynnelserörelsemängden
  $p_x = mv_x$
  $p_y = mv_y$
- Vi bestämmer det konstanta tidssteget Δt (måste testa att det inte är för stort!)

1. Vi beräknar x- och y-komponenterna för den totala kraften
   $F_{lm} = -konstv^2$
   $F_{Tot,x} = F_{lm} \cdot cos(\alpha)$
   $F_{Tot,x} = F_{lm} \cdot sin(\alpha) - mg$

1. Bestäm de nya rörelsemängderna efter tidssteget Δt:
   $p_x = p_x + F_{Tot,x}\Delta t \quad p_y = p_y + F_{Tot,y}\Delta t$

2. Beräkna nya hastigheterna:
   $\mathrm{v}_{ny,x} = \mathrm{p}_x/m \quad \mathrm{v}_{ny,y} = \mathrm{p}_y/m$

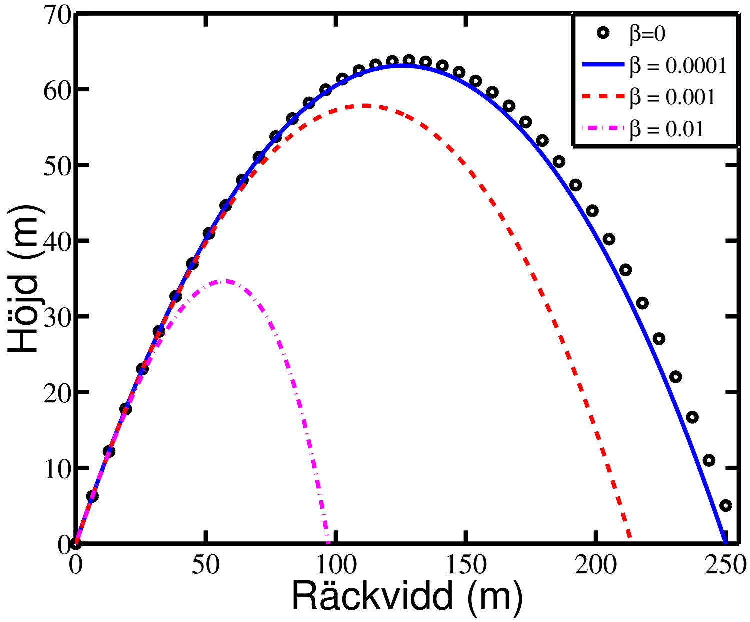
3. Medelhastigheten under tidssteget:
   $\mathrm{v}_{medel,x} = (v_{ny,x} + v_x)/2 \quad \mathrm{v}_{medel,y} = (v_{ny,y} + v_x)/2$

4. Bestäm nya platserna efter Δt:
   $x = x + v_{medel,x} \quad y = y + v_{medel,y}$

5. Uppdatera hastigheterna och platserna:
   $v_x = \mathrm{v}_{ny,x} \quad v_y = \mathrm{v}_{ny,y}$
   $\mathrm{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
   $\alpha = \mathrm{atan}(v_y/v_x)$

6. Ifall y fortfarande större än 0, hoppa till punkt 1. annars sluta

I figuren nedan ser vi hur långt en projektil med begynnelsehastigheten 50 m/s och vinkeln 45° med olika luftmotståndskoefficienter $\beta = konst/m$ flyger



I vakuum faller olika massor lika snabbt, men luft eller vätskemotståndet gör att olika massor faller olika snabbt i luft och vätska. För låga hastigheter i luft och vätskor, är motståndet proportionellt till farten

$$F_{lm} \quad = \quad k \cdot v$$

där kraften är i motsatt riktning till hastigheten och k är luftmotståndskoefficienten. Släpper man en sten i vatten, ger Newtons andra lag

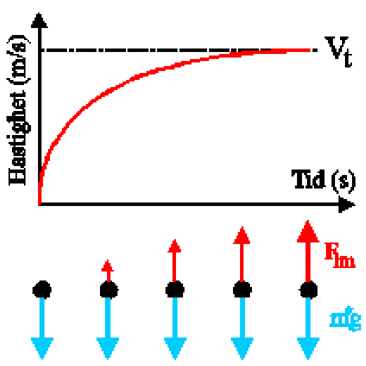
$$F \quad = \quad w - F_{lm} = m^* g - kv = m^* a \tag{92}$$

där $m^* = V(\rho - \rho_v)$ (där V och ρ är kroppens volym, respektive densitet och ρ_v är vattnets densitet, se: Archimedes princip, kapitel 4.7). Vi ser att ju större fart stenen får, så minskar den totala kraften som accelererar stenen, se bilden nedanför. Till slut har stenen fått sin största fart, kallad *terminalhastighet* v_t. Då är gravitationskraften minus vattnets lyftkraft lika med vätskemotståndet

$$F \quad = \quad w - F_{lm} = m^* g - kv = 0 \quad \Rightarrow \quad v_t = \frac{m^* g}{k} \tag{93}$$

Vill man ha hastigheten som en funktion av tiden, så måste man lösa differentialekvationen, se Ekv. (92)

$$\begin{aligned}
m^* a = m^* \frac{dv}{dt} &= m^* g - kv \qquad | \quad 1/k \\
\Rightarrow \frac{m^*}{k} \frac{dv}{dt} &= \frac{m^* g}{k} - v = v_t - v \qquad\qquad v_t = \frac{m^* g}{k} \\
\Rightarrow \frac{dv}{v - v_t} &= -\frac{k}{m^*} dt \\
\int_0^v \frac{dv'}{v' - v_t} &= -\frac{k}{m^*} \int_0^t dt' \\
\Big|_0^v ln(v' - v_t) &= -\Big|_0^t \frac{k}{m^*} t' \\
ln(v - v_t) - ln(-v_t) &= -\frac{k}{m^*} t \\
ln\left(\frac{v - v_t}{-v_t}\right) &= -\frac{k}{m^*} t \qquad\qquad ln(A) - ln(B) = ln(A/B) \\
ln\left(1 - \frac{v}{v_t}\right) &= -\frac{k}{m^*} t \qquad | \quad exp \\
1 - \frac{v}{v_t} &= e^{-\frac{k}{m^*} t} \\
v &= \underline{\underline{v_t \left(1 - e^{-\frac{k}{m^*} t}\right)}}
\end{aligned}$$



Från denna får man lätt acceleration som funktion av tiden

$$a = \frac{dv}{dt} = -v_t \frac{-k}{m^*} e^{-\frac{k}{m^*} t} = \frac{v_t k}{m^*} e^{-\frac{k}{m^*} t}$$