2 Rörelsemängdsprincipen

I naturen bevaras följande storheter: **rörelsemängden**, **rörelsemängdsmomentet** och **energin**.

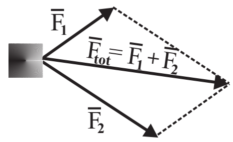
För att lösa fysikaliska problem måste man först bestämma systemet, vars rörelseekvation eller tillstånd man vill bestämma. Detta system kan bestå av en eller flera objekt. Allt som inte är del av systemet är **omgivningen**. Till exempel kan den totala rörelsemängden för ett system endast ändras via växelverkan med omgivningen.

2.1 Kraft som en vektorstorhet

Alla har en erfarenhet av vad ordet *kraft* betyder. Man behöver kraft för att lyfta ett föremål. För att lyfta föremålet, måste man dessutom ta tag i det. I detta fall talar man om en *kontaktkraft*. Det finns också krafter som kan påverka på avstånd. Till exempel är *gravitationskraften* en sådan kraft.

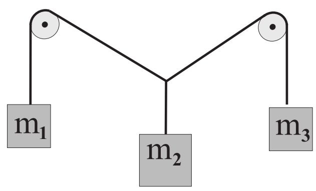
Krafterna är vektorer som har *magnitud* och *riktning*. Ifall många krafter påverkar en kropp, kan man summera dessa krafter till en summakraft

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_{tot}$$

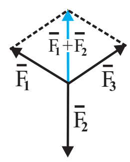


Detta kan skrivas i komponentform:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= Fx_{tot} \\ \sum F_y &= Fy_{tot} \\ \sum F_z &= Fz_{tot} \end{aligned}$$



I bilden bredvid, ser vi ett experiment, där krafternas vektoregenskaper syns tydligt: Punkten som sammanbinder de tre trådarna står stilla, vilket betyder att kraften $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3$.



Exempel: Du kör en Lamborghini Countach 2 i 200 km/h och passerar en Lada som kör i 80 km/h. Vilkendera bilen påverkas av en större summakraft?

Eftersom båda bilarna kör med **konstant fart**, är summakraften lika med noll för båda bilarna. Lamborghinin har ett större luftmotstånd p.g.a. den större farten än Ladan, vilket också betyder att Lamborghinis motor måste alstra motsvarande mera kraft än Ladas motor.

2.2 Rörelsemängden

En viktig storhet, *rörelsemängd* **p** definieras via den totala kraften på kroppen

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{Tot} \qquad (67)}$$

som säger att förändringen av en kropps rörelsemängd som en funktion av tiden är lika med kraften som accelererar kroppen. Denna ekvation stämmer även ifall massan på kroppen ändrar (exempelvis raket). Den relativistiska rörelsemängden kan skrivas som

$$\boxed{\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (68)}$$

Ifall hastigheten för kroppen är liten jämfört med ljusets hastighet (vanligtvis är gränsen ca. 10% av ljushastigheten) blir rörelsemängden

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (69)$$

Vidare, ifall massan är konstant får vi

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \qquad (70)$$

vilket kallas Newtons andra lag. Vi tittar lite närmare på *Newtons lagar* .

Newtons första lag kan kort ges som: **En kropp rör sig rätlinjigt med konstant hastighet (som kan vara noll), ifall inga krafter påverkar den.**

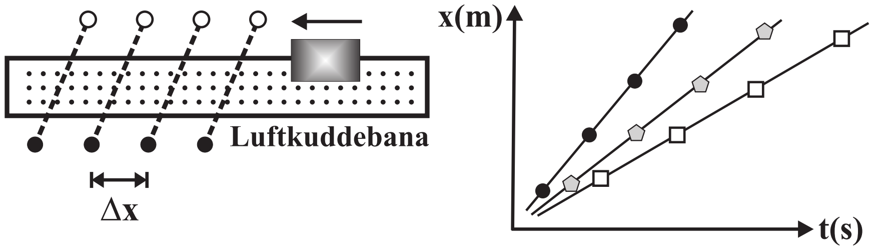
Denna lag, ofta kallad också **dynamikens första lag**, framlades först av **Galileo Galilei**. Den verkar vara i konflikt med våra observationer av naturen, där det verkar vara så att all rörelse stannar ifall ingen kraft påverkar rörelsen. Detta beror på att alla kroppar i naturen påverkas av 'osynliga' krafter som kommer från friktion och luftmotstånd. Ifall vi eliminerar dessa, så kan vi observera att *Newtons första lag* faktiskt håller.

Experimentellt 'bevis' [6] på att Newtons första lag stämmer, kan vi få genom att titta på en kropp som rör sig friktionsfritt på en luftkuddebana. Vi ger vid tidpunkt noll en kropp en knuff och iakttar dess fart som en funktion av tiden, se figuren nedan. Vi ser att riktningkoefficienten, d.v.s. farten dx/dt hålls konstant, vilket bekräftar Newtons första lag.

Newtons första lag gav att ifall inga krafter påverkar en kropp, eller att summakraften är noll, så står kroppen stilla eller rör sig med en konstant hastighet. Kortfattat kan men ge detta som att accelerationen för en kropp är lika med noll ifall ingen kraft eller noll summakraft påverkar kroppen. Acceleration behöver alltså kraft. Hur denna acceleration beror av kraften ges av **Newtons andra lag**

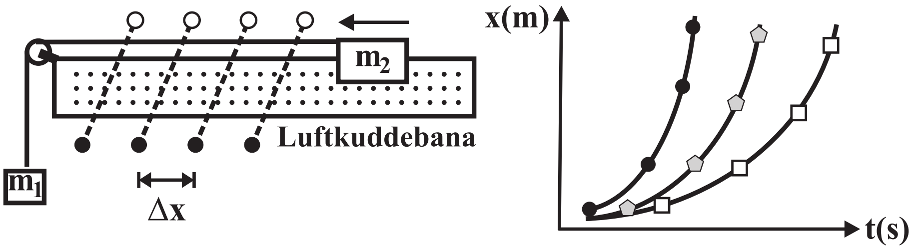
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (71)$$

[6] Hur många experiment behövs för att bevisa att en formel stämmer? Hur många behövs för att bevisa att formeln inte stämmer?



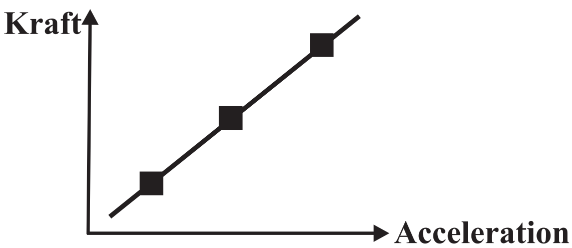
Figur 15: Experiment med en kropp som rör sig friktionsfritt på en luftkuddebana. Grafen visar t-x-linjer för rörelse med tre olika hastigheter.

Experiment: Vi tittar igen på en kropp som rör sig friktionsfritt på en luftkuddebana. Denna gång har vi en massa (m_1) som accelereras i jordens gravitationsfällt. Denna massa är fäst med en tunn tråd i en annan massa (m_2), se bild (16). Hela systemet börjar accelereras och vi får m_2:s plats som en funktion av tiden. I bilden har vi gjort tre experiment där summan $m_1 + m_2$ är konstant, men m_1 och följaktligen också accelerationskraften ändras.



Figur 16: Experiment på en luftkuddebana där en kraft påverkar en kropp. Ju större kraft, desto större är accelerationen. Kurvorna är anpassning av funktionen: $x = 1/2 \cdot a \cdot t^2$ till de experimentella t-x-punkterna.

Ifall vi anpassar funktionen $x = 1/2 \cdot a \cdot t^2$ till de experimentella punkterna i figuren får vi tre olika accelerationer för tre olika krafter. Vi observerar att accelerationen är proportionellt till kraften, $F \propto a$ och vi kallar proportionalitetsfaktorn för **massan** m, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Massan ger ett mått på hur materia påverkas av en kraft. För samma kraft är accelerationen för en stor massa mindre än för en liten massa, kallad massans *tröghet* (eng. inertia).



Figur 17: Vi ser att accelerationen för en kropp är direkt proportionerlig till kraften som påverkar kroppen.

I SI systemet, som består av internationellt accepterade enheter, har massan fått en basenhet kallad **kg**, vilket leder till att kraftens enhet blir: [F] = kg m/s^2 vilket kallas för newton **N**. En Newton är den kraft som behövs för att ge en kropp med massan 1 kg en acceleration på 1 m/s^2.

Nära jordytan[7] har gravitationskraften en nästan konstant magnitud och är alltid riktad mot jordens centrum. I detta fall kan man approximera gravitationskraften som verkar på en kropp med

$$\boxed{W = m \cdot g \qquad (72)}$$

där W är kraften eller vikten (N), m kroppens massa (kg) och är g gravitationsaccelerationen på jordytan. Då man vardagligt talar om en persons vikt, borde man egentligen tala om massan för personen.

[7] Avståndet till jordens centrum ändrar mycket lite

Exempel: På jorden är det lätt att bestämma en kropps massa genom att väga den. Hur kan man bestämma en kropps massa i en rymdraket, där gravitationskraften inte kan användas? Detta problem har man i rymdraket då man försöker se inverkan av gravitationslösheten på en människas kropp.

Man har en apparat som accelererar en kropp med konstant kraft F. Nu mäter man accelerationen av en standard M_s (låt oss säga 1 kg), och accelerationen av människan M_m i samma apparat. Då får man ekvationen med vilken kroppens massa lätt kan beräknas

$$M_m \cdot a_m = M_s \cdot a_s. \tag{73}$$

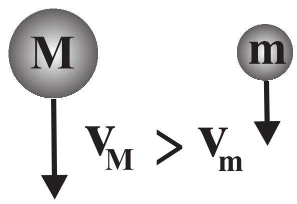
Kraft F	N = kg m/s^2
Gravitationskraften mellan solen och jorden	$3.5{\times}10^{22}$
Gravitationskraften mellan månen och jorden	$2.0{\times}10^{20}$
Lyftkraft för en raket vid starten	$3{\times}10^{7}$
Vikten av en fullvuxen blåval	$2{\times}10^{6}$
Maximala dragkraft för ett lok	$9{\times}10^{5}$
Vikten av en människa	800
Vikten av ett äpple	1
Elektriska kraften mellan en proton och elektron i en väteatom	$8{\times}10^{-8}$
Gravitations kraften mellan en proton och elektron i en väteatom	$4{\times}10^{-47}$

Exempel: Frågan är, att faller alla massor lika snabbt nära jordytan i vakuum?

Låt oss göra följande **tankeexperiment:**

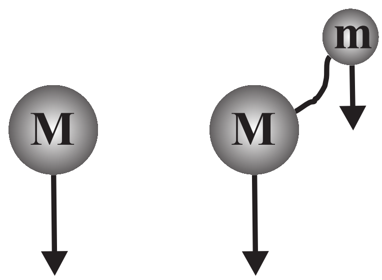
Två olika massor **M** och **m** faller under inverkan av gravitation i vakuum

Vi gör **antagandet** att den större massan **M** faller snabbare är den lilla.



⇒ Detta antagande innebär att en ännu större massa **M+m** borde falla ännu snabbare

Vi samman binder nu massa **M** med massan **m** med en masslös tråd och får följande situation



Den lilla massan **m** retarderar nu massa **M**:s fallande i systemet **M+m**, vilket leder till att systemet **M+m** faller långsammare än **M** ensam.

Men detta motsäger ju antagandet att **M+m** faller snabbare än **M**
⇒ Begynnelseantagandet att en större massa faller snabbare än en mindre är **osant**.[8]
Vilket betyder att: <u>alla massor faller lika snabbt i vakuum.</u>

[8]Samma resonemang kan användas för att bevisa att en mindre massa inte faller snabbare än en större massa i vakuum.

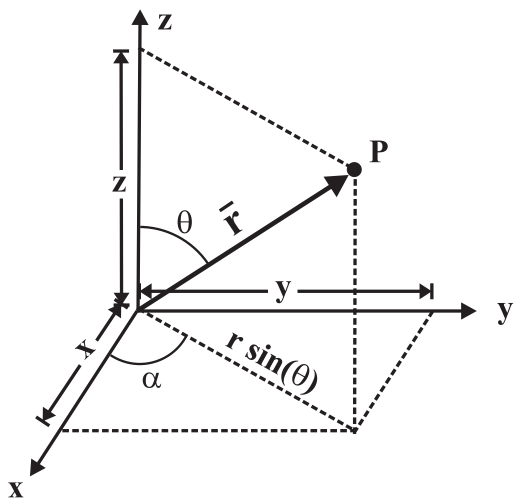
2.3 Rörelse i 2 och 3 dimensioner

Vi lever i en tredimensionell värld där den tredimensionella rörelsen kan spjälkas upp i tre stycken oberoende ekvationer i en dimension. Vi definierar *positionen* i **kartesiska koordinater** följande (en vektor betecknas härefter också ibland med **tjock font**: $\vec{r} = \mathbf{r}$)

$$\mathbf{r}_{kart} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{74}$$

I **sfäriska koordinater** kan x, y och z ges som (se Appendix A. hur man får volymen för en sfär genom integrering över sfäriska koordinater)

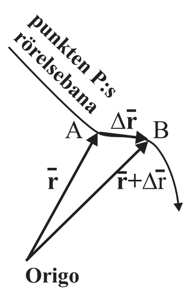
$$x = r \cdot sin(\theta) \cdot cos(\alpha) \tag{75}$$
$$y = r \cdot sin(\theta) \cdot sin(\alpha) \tag{76}$$
$$z = r \cdot cos(\theta) \tag{77}$$



Figur 18: En punkts koordinater given i kartesiska och sfäriska koordinater.

I figuren till höger rör sig en punkt från A till B under tidsintervallet Δt, och förflyttningsvektorn är $\Delta\mathbf{r}$. Den tredimensionella **medelhastigheten** och **hastigheten** definieras då som

$$< \mathbf{v} > = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$
$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$



De enskilda hastighetskomponenterna får man från koordinaternas (x,y och z) tidsderivator:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

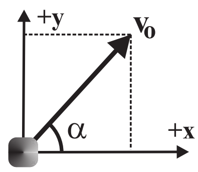
Likadant definieras *accelerationerna*

$$\begin{aligned} <\mathbf{a}> &= \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \\ \mathbf{a} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \\ a_x &= \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \end{aligned}$$

2.3.1 Projektilrörelse

En projektil kallas en kropp som har givits en begynnelsehastighet och som sedan rör sig genom luft och påverkas endast av jordens dragningskraft och luftmotståndet. Först tittar vi på idealfallet att luftmotståndet inte påverkar projektilens bana. I detta fall finns bara en kraft, jordens dragningskraft, som påverkar projektilen. Denna kraft är riktad neråt, mot jordens mitt, och accelererar projektilen neråt med konstant magnitud ≈ 9.8 m/s^2. Denna projektilrörelse sker i två dimensioner (tre, ifall vi har sidovind). Men istället för att lösa en ekvation i två dimensioner, löser vi två separata ekvationer i en dimension. Vi separerar alltså projektilrörelsen i x- och y-riktning

$$\begin{aligned} x &= x_\circ + v_{x\circ} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y &= y_\circ + v_{y\circ} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{aligned}$$



Vi sätter $x_\circ$ och $y_\circ$ lika med noll. Ingen acceleration i x-riktning och accelerationen i y-riktning är $-g$. Begynnelsehastigheterna i x- och y-riktningarna ($v_{x\circ}$ och $v_{y\circ}$), får man från projektilens begynnelsehastighet $\mathbf{v}_\circ$ och dess elevationsvinkel α (vinkeln mellan projektilens färdriktning och marken), se figuren ovan. Rörelseekvationerna för projektilen blir då

$$x = [v_\circ cos(\alpha)]t \tag{78}$$
$$y = [v_\circ sin(\alpha)]t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{79}$$

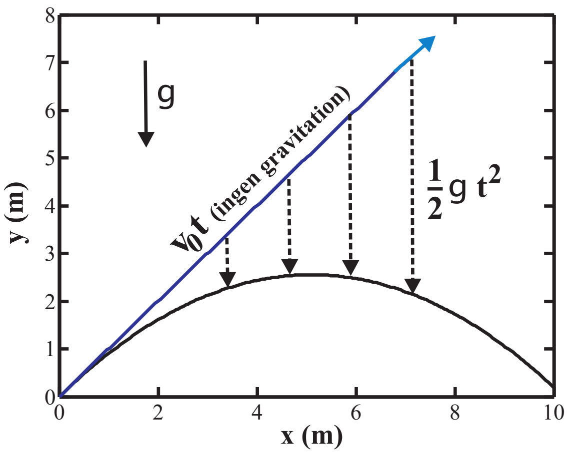
Projektilens x- och y-hastighetskomponenter får man genom derivering

$$v_x = v_\circ cos(\alpha) \tag{80}$$
$$v_y = v_\circ sin(\alpha) - gt \tag{81}$$

Dessa ekvationer berättar helt projektilens position och hastighet vid varje tidpunkt. Nämnas kan att projektilens fart och riktning (vinkeln mellan marken och projektilens hastighet) ges av

$$
\begin{aligned}
|v| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\
tan(\alpha) &= v_y / v_x
\end{aligned}
$$

Projektilens **maximihöjd** och **räckvidd** (avståndet i x-riktning så att y = 0 igen) kan lätt räknas. I figur (19) ser vi en projektils kastparabel. Ritad finns också situationen där ingen kraft påverkar kroppen.



Figur 19: Projektilrörelse med och utan gravitationskraft.

Projektilen når maximihöjd då y-värdet är maximum, detta sker vid tidpunkten T då $dy/dt = 0$, vilket ger $v_\circ sin(\alpha) - gT = 0$, därifrån T löses

$$T = \frac{v_\circ sin(\alpha)}{g} \tag{82}$$

Insättning av T i Ekv. (79) ger **maximihöjden**

$$h_m = v_\circ sin(\alpha) T - \frac{1}{2} g T^2 = \frac{v_\circ^2 sin^2(\alpha)}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_\circ^2 sin^2(\alpha)}{g^2} = \frac{v_\circ^2 sin^2(\alpha)}{2g} \tag{83}$$

Efter tiden $2T$ korsar projektilen x-axeln, och Ekv. (78) ger **räckvidden** för kastparabeln[9]

$$R = (v_\circ cos(\alpha))\, 2T = v_\circ cos(\alpha) \frac{2 v_\circ sin(\alpha)}{g} = \frac{2 v_\circ^2 sin(\alpha) cos(\alpha)}{g} = \frac{v_\circ^2 sin(2\alpha)}{g} \tag{84}$$

vars maximi inträffar då begynnelsevinkeln $\alpha = \pi/4$ rad eller 45°.

[9] $sin(2\alpha) = sin(\alpha + \alpha) = sin(\alpha)cos(\alpha) + cos(\alpha)sin(\alpha) = 2sin(\alpha)cos(\alpha)$

Frågor:

1. Hur bra tror du att de härledda formlerna för projektilrörelse skulle beskriva experiment, där man ger en stålkula en begynnelsehastighet och en begynnelsevinkel och sedan mäter räckvidden? Du kan också ge feluppskattningen i $\%$. Enligt formeln, inträffar maximiräckvidd vid elevationsvinkeln $45°$, ifall man beaktar luftmotståndet, vid vilken begynnelsevinkel inträffar maximiräckvidden då, mindre, lika med eller större än $45°$?

2. Om du jämför *projektilrörelse* och rörelse för en *simpel pendel* där $sin(\theta)$ approximeras med θ, så vilkendera teorin tror du att beskriver experiment bättre? Varför?

3. Helt allmänt, hur bra tror du att de härledda fysikaliska formlerna beskriver den verkliga världen i genomsnitt? Kan du uppskatta felet? Tror du att *projektilrörelsen* beskriver verkliga världen bättre eller sämre jämfört med formlerna i genomsnitt?