Derivering av koordinaterna x,y och z två gånger med avseende av tiden i Ekv. (31-33) ger

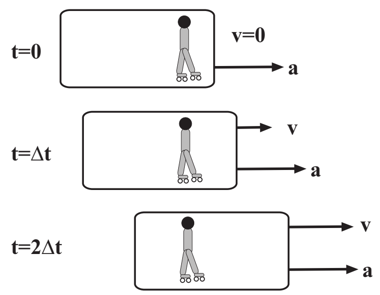
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2}$$

Vi ser alltså att accelerationen för vilket objekt som helst är oförändrad i ett annat koordinatsystem som rör sig med en konstant hastighet relativt till koordinatsystemet där hastigheten först mäts ($\mathbf{a} = \mathbf{a}'$). Newtons lagar följs alltså i alla koordinatsystem som rör sig med konstant hastighet relativt till varandra, vilka härefter kallas för **inertiella koordinatsystem**.

1.2.1 Accelererande koordinatsystem

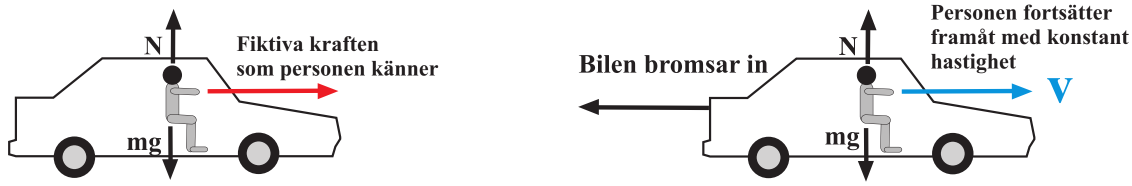
Newtons lagar gäller inte i alla koordinatsystem. Betrakta en person som står på rullskridskor i en tågvagn. Först står båda stilla.

Eftersom personen står på rullskridskor, känner hon inga horisontella krafter. När sedan tåget börjar accelerera framåt, kommer personen att röra sig bakåt i relation till tåget. För personen verkar detta som om en kraft påverkar henne. I verkligheten påverkar inga krafter henne, och hon står stilla i jordens koordinatsystem. $0 = F \neq ma \Rightarrow$ Newtons andra lag gäller inte inne i en accelererande tågvagn.



1.2.2 Fiktiva krafter

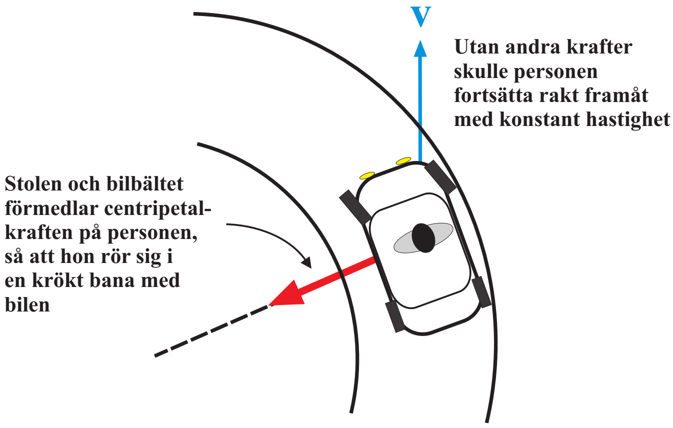
I olika situationer kan det för en människa kännas att hon påverkas av diverse krafter som inte i verkligheten finns. I en bil som bromsar, känns det att en kraft kastar människan framåt mot vindrutan. Denna kraft som människan känner finns inte, utan är bara en subjektiv känsla människan har inne i den retarderande bilen.



Figur 8: A) Då bilen är referenssystem, verkar det att en kraft kastar människan framåt mot vindrutan. Denna kraft finns inte, utan bilen är i accelererande (egentligen retarderande) rörelse och är inte ett inertiellt koordinatsystem. B) Ser man på händelsen från markens inertiella koordinatsystem, ser man att inga horisontala krafter påverkar människan under inbromsningen, utan att hon fortsätter framåt med konstant hastighet.

Centrifugalkraft?

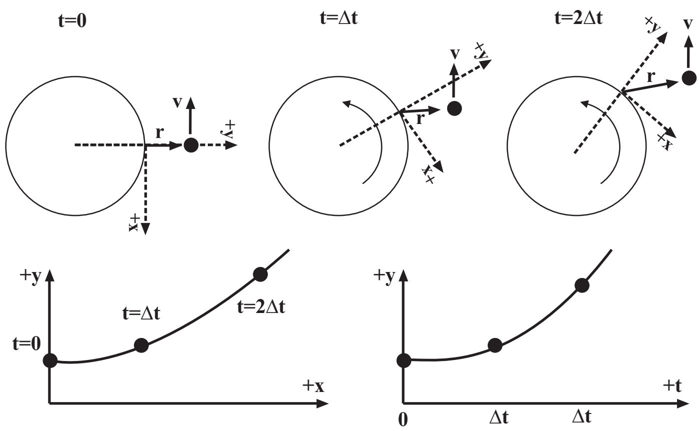
I en kurva känns det som om en kraft trycker dig mot bildörren. Denna, ofta kallade *centrifugalkraft* finns inte, utan du fortsätter rakt fram enligt Newtons första lag medan bilen svänger i kurvan. Stolen, bältet och slutligen också dörren förmedlar dig kraften som gör att du följer med bilen i kurvan.



Figur 9: Bilen och personen i en kurva sett från ovan. Utan begränsningskraften från stolen, bältet och bilen, skulle personen fortsätta rakt framåt i kurvan.

Jorden som roterande koordinatsystem

På grund av jordens rotation, befinner sig alla kroppar på dess yta i en konstant accelererad rörelse, d.v.s. jorden är **inte** ett inertiellt koordinatsystem, där Newtons lagar gäller.

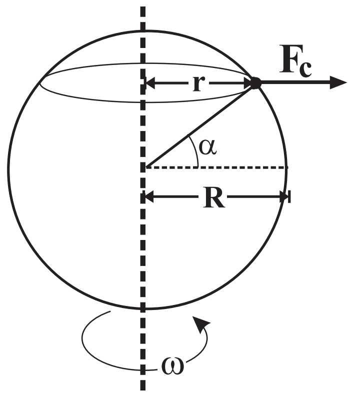


Betrakta figuren ovan, där ett föremål först rör sig med konstant hastighet i -x riktningen relativt till jordytan. Jordens rotation gör att föremålet ser ut att accelerera bort från jordytan.

Vi kan nu skapa en fiktiv kraft, kallad centrifugalkraft, så att koordinatsystemet som roterar med jorden verkar vara inertiellt (Newtons lagar gäller). Denna kraft är lika stor som centripetalaccelerationen skulle vara för en massa att utföra en cirkelbana kring jorden (se Figur 10)

$$|\mathbf{F}_c| = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = m\omega^2 R cos(\alpha) \tag{38}$$

där riktningen av kraften är ut från rotationscentrum. Vid polerna är $\mathbf{F}_c = 0$.

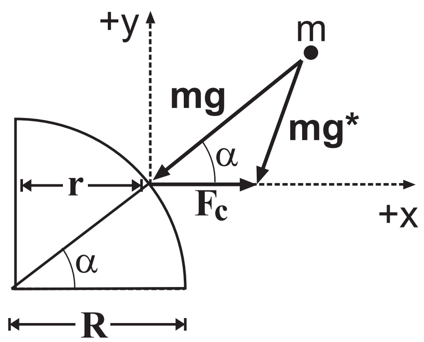


Figur 10: Jordens rotation gör att en fiktiv kraft kallad centrifugalkraft ser ut att verka på alla massor på jordytan. Denna fiktiva kraft som är riktad rakt ut från rotationsaxeln är störst vid ekvatorn och noll vid polerna, se Ekv. (38).

Man kan nu definiera en ny parameter: **effektiva g**, där vi summar gravitationsaccelerationen (verklig kraft) på jordytan med centrifugalaccelerationen (fiktiv kraft)

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^*(\alpha) &= \mathbf{g} + \frac{\mathbf{F}_c}{m} = -g(cos(\alpha)\hat{i} + sin(\alpha)\hat{j}) + \omega^2 Rcos(\alpha)\hat{i} \\ &= (-g + \omega^2 R)cos(\alpha)\hat{i} - gsin(\alpha)\hat{j} \end{aligned} \tag{39}$$

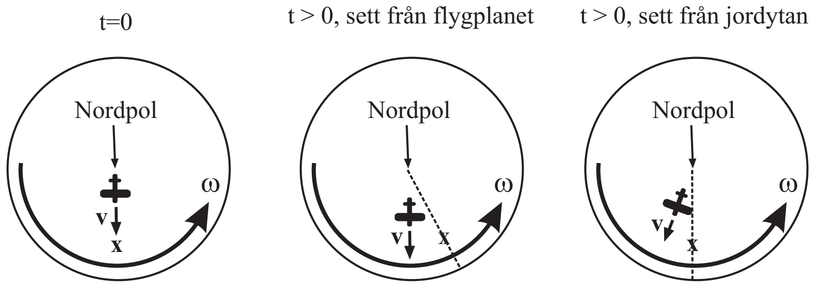
där riktningen ges visuellt i figuren.



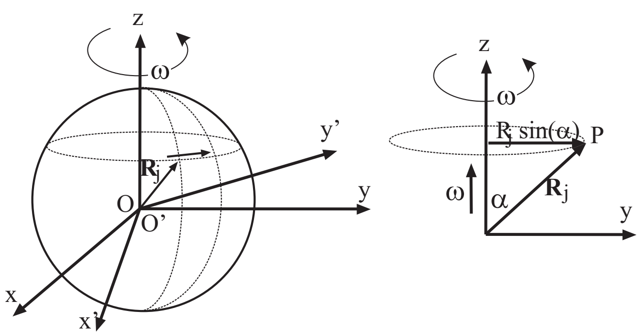
Figur 11: Den fiktiva centrifugalkraften som ser ut att verka på alla massor på jordytan kan tas i beaktande genom att definiera parametern: **effektiva g** som inte är riktad rakt mot jordens centrum. Vid polerna är den effektiva g lika med den vanliga gravitationsacceleration **g**.

1.2.3 Corioliskraften (inte till prov)

Vi skall nu härleda en annan fiktiv kraft som tycks verka på en kropp i jordens referenssystem. Denna fiktiva kraften härstammar från jordens rotation och hastigheten för kroppen. Anta att vi har vid tiden t = 0, ett flygplan som startar från nordpolen och flyger söderut med hastigheten v mot en stad x (se bild). Under tiden som flygplanet går mot söder, roterar jorden och därmed också staden mot öst, andra bilden. Från jordytan sett, tredje bilden, ser det däremot ut som om flygplanet skulle flyga mot sydväst.



För att nu se hur rörelseekvationerna borde se ut för att jorden skulle verka som ett inertiellt koordinatsystem, definierar vi två olika kartesiska (xyz) koordinatsystem; Det första koordinatsystemet x,y,z med origo O i jordens centrum, rotererar inte och är därmed inertiellt. Det andra kartesiska koordinatsystemet x',y' och z' har också origo O' vid jordens centrum, men roterar motsols kring z-axeln med samma vinkelhastighet som jorden.

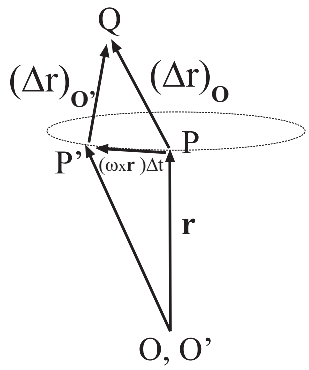


Vi ser nu att en punkt som roterar med jorden och står stilla i x',y' och z' koordinatsystem, roterar kring x,y,z systemet. Från bilden ser vi att den tangentiella hastigheten för punkten P på jordytan är v_{tan} = $|\omega|$ $|R_j| sin(\alpha)$. Denna tangentiella hastigheten ändrar hela tiden riktning, som tas i beaktande om man skriver den som en kryssprodukt

$$\mathbf{v}_{tan} = \omega \times \mathbf{R}_j \tag{40}$$

I detta ögonblick är riktningen för $\mathbf{v}_{tan}$ in i pappret.

Vi betraktar nu en godtycklig punkt P i det stillastående x,y,z koordinatsystemet som är på avståndet r från jordens centrum vid tiden t = 0. Vid denna tidpunkt sammanfaller axlarna för det roterande koordinatsystemet x',y',z' med x,y,z. Under en liten tidpunkt Δt förflyttar sig punkten P till en ny punkt Q i x,y,z koordinatsystemet. Vad blir nu position för punkten Q i x',y',z' systemet? Under denna Δt har punkten P i x',y',z' systemet roterat till punkten P' i x,y,z systemet. Denna förflyttningsvektor är, jämför med Ekv. (40) $(\omega \times \mathbf{r})\Delta t$. Vi får nu ekvationen som relaterar förflyttningen från punkt P till Q i de två koordinatsystem



$$(\Delta \mathbf{r})_O = (\Delta \mathbf{r})_{O'} + (\omega \times \mathbf{r})\Delta t$$

Vi deriverar med avseende av tiden och får

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{O'} + (\omega \times \mathbf{r})$$

som ger en relation mellan hastigheterna i de två systemen

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + (\omega \times \mathbf{r}) \qquad (41)}$$

Nu kan vi betrakta situationen där $\Delta \mathbf{r}$ ersätts med hastigheterna $\Delta \mathbf{v}$

$$(\Delta \mathbf{v})_O = (\Delta \mathbf{v})_{O'} + (\omega \times \mathbf{v})\Delta t$$

Vi deriverar detta och får motsvarande[3]

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{O'} + \omega \times \mathbf{v}$$

Vi sätter in hastigheten från Ekv. (41) som ger

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d'}{dt}[\mathbf{v}' + (\omega \times \mathbf{r})] + \omega \times [\mathbf{v}' + (\omega \times \mathbf{r})] \\ &= \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d'\omega}{dt} \times \mathbf{r} + \omega \times \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \omega \times \mathbf{v}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r})\end{aligned}$$

där $d'\omega/dt$ = 0, $\mathbf{a}$ = $d\mathbf{v}/dt$ och $\mathbf{a}'$ = $d'\mathbf{v}'/dt$ vilket vidare ger

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \mathbf{a}' + (\omega \times \mathbf{v}') + (\omega \times \mathbf{v}') + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{a}' + 2(\omega \times \mathbf{v}') + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \qquad (42)\end{aligned}$$

[3] Allmänt kan relationen mellan alla godtyckliga vektorer $\mathbf{n}$ i de två koordinatsystemen skrivas som: $\left(\frac{d\mathbf{n}}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\mathbf{n}}{dt}\right)_{O'} + \omega \times \mathbf{n}$

Vi multiplicerar med massan och får

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' + 2m(\omega \times \mathbf{v}') + m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \tag{43}$$

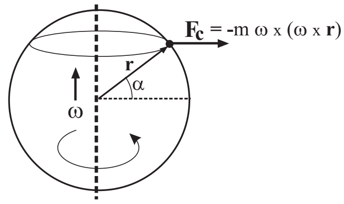
$\Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{F}' = \mathbf{F} - 2m(\omega \times \mathbf{v}') - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \quad (44)}$$

Alltså, på en kropp med massan m verkar en riktig kraft $\mathbf{F}$ i det ickeroterande inertiella koordinatsystemet O. I det med jorden roterande koordinatsystemet O' verkar det som att en kraft $\mathbf{F}'$ verkar på kroppen. Termerna $-2m(\omega \times \mathbf{v}')$ och $-m\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ är fiktiva (inte riktiga) krafter, som adderas till den riktiga kraften F för att Newtons lagar verkar att gälla i det roterande koordinatsystemet O'.

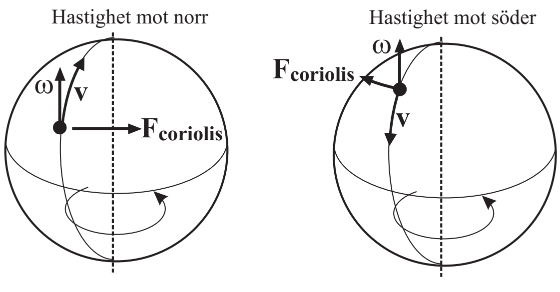
Vi tittar först på $-m\omega\times(\omega\times\mathbf{r})$ termen. Den första kryssprodukten $\omega\times\mathbf{r}$ är den tangentiella hastigheten som pekar in i pappret. $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ pekar alltså in mot rotationsaxeln. Minus-tecknet gör att denna fiktiva kraften pekar ut från rotationsaxeln, och är den bekanta centrifugalkraften från förut, Ekv. (38)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c &= -m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \\ |\mathbf{F}_c| &= m\omega^2 rcos(\alpha) \end{aligned}$$



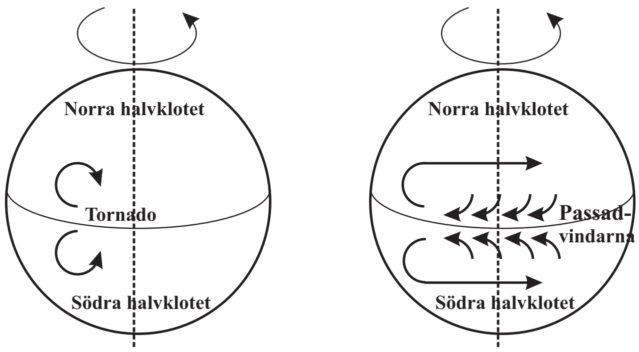
Den andra termen $-2m(\omega \times \mathbf{v}')$ är olika noll bara ifall kroppen har en hastighet relativt till det roterande koordinatsystemet O' ($\mathbf{v}' \neq 0$). Vi kallar denna kraft för **corioliskraften** vars riktning beror av hastigheten

$$\boxed{\mathbf{F}_{coriolis} = -2m(\omega \times \mathbf{v}') \quad (45)}$$



Figur 12: En kropp som har en hastighet mot norr på norra halvklotet, verkar på jordytan driva mot nordost. Corioliskraften är alltså mot öster. Ifall kroppen rör sig mot söder på norra halvklotet, är corioliskraften mot väster.

Corioliskraften är större, ju högre hastighet en kropp har, och konkret kan man se kraften i tornadon, som alltid snurrar medsols på norra halvklotet och motsols på södra halvklotet. På segelbåtarnas tid utnyttjades **passadvindarna**[4], som är exempel på Corioliskraften, för att segla segelbåtarna mot väster.



Figur 13: Tornadon på norra halvklotet roterar medsols. På södra halvklotet däremot, snurrar tornadon alltid motsols.

[4]Passadvindarna eller också kallade handelsvindarna är en vindtyp nära jordens ekvator som uppstår då luft från högtrycksområde runt ekvatorn blåser mot lågtrycksområde vid ekvatorn. Passadvindarnas vanliga riktning på norra halvklotet är mot sydväst och på södra halvklotet mot nordväst.

1.3 Den speciella relativitetsteorin

Den speciella relativitetsteorin publicerades 1905 av Albert Einstein, och den gäller bara för kroppar långt från gravitationsfält och inte i accelererad rörelse. Relativitetsteorins grunder ligger i att ljuset har en konstant hastighet c = 299 792 458 m/s i vakuum, oberoende från vilket koordinatsystem vi mäter den. Ljushastigheten kallas **invariant** vid byte av referenssystem.

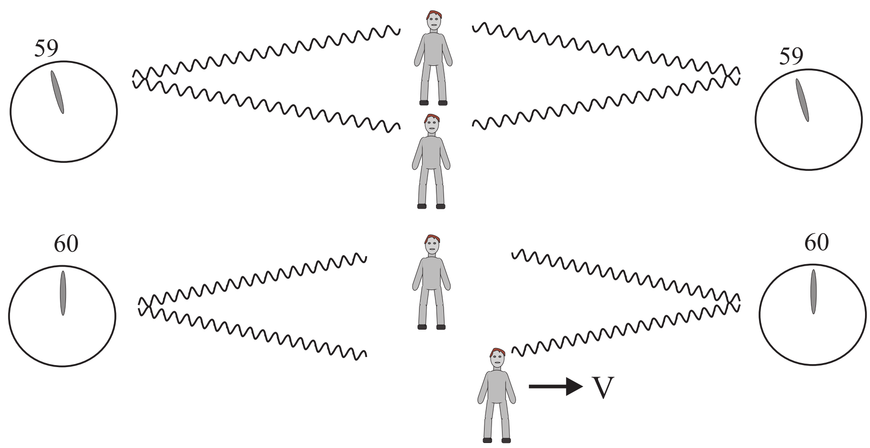
Enligt Galilei transformationen, är hastigheten beroende av referenssystemets hastighet. Exempelvis ljudets hastighet 331 m/s blir i 40 m/s vindförhållande 371 m/s i medvind och 291 m/s i motvind.

Michelson och Morley försökte i början av 1880 talet mäta 'etervinden', genom att mäta hastighetsskillnaden för ljuset i jordens färdriktning och vinkelrät till denna. Jordens färdhastighet $\approx$ 30 km/s. Resultatet blev att 'etervinden' var mindre än 5 km/s. Noggrannare mätningar gjorda senare som använder moderna apparater och γ-strålning har krympt 'etervinden' till mindre än 3 m/s.

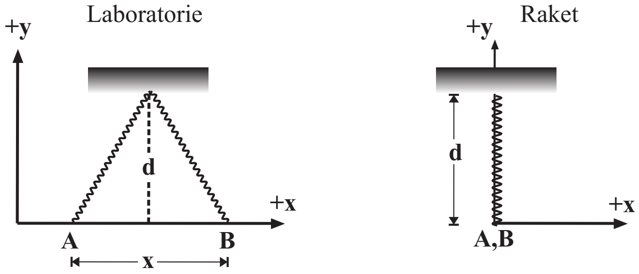
1.3.1 Relativitetsprincipen

Relativitetsprincipen säger att **Alla fysikaliska lagar har samma form i alla inertiella koordinatsystem**. Detta betyder bland annat att alla fysikaliska konstanter, däribland ljusets hastighet, måste ha samma värde i alla inertiella koordinatsystem.

Den konstanta ljushastigheten (signalhastigheten) kommer att ge ganska oförutsedda fenomen. Tidssignalerna kan maximalt röra sig med ljusets hastighet, vilket gör att begreppet samtidighet förlorar sin mening. Vi har två personer mitt emellan två klockor, då klockorna är en sekund före klockan tolv. Den ena personen som står stilla ser att klockorna slår tolv samtidigt. Däremot ser personen som rör sig med hög hastighet mot den ena klockan, att denna klocka slår tolv före den andra!



Ett annat exempel. Vi har en raket som rör sig med hög hastighet mot höger. Vid punkten **A** emitteras en ljusglimt från raketen mot en spegel. Vid punkten **B** (avståndet x till **A**) mottar raketen den reflekterade ljusglimten. Vad har hänt?



Raketens hastighet relativt till det stationära laboratoriekoordinatsystemet är: $v = x/t_{lab}$ där t_{lab} är tiden i laboratoriekoordinatsystemet. Distansen som ljusglimten har färdats under denna tid är

$$2\left[d^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right]^{1/2} \tag{46}$$

Ljusets hastighet är c, vilket ger tiden mellan ljusglimtens emission och mottagning i laboratoriekoordinatsystemet

$$t_{lab} = \frac{2}{c}\left[d^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right]^{1/2} \tag{47}$$

I raketens koordinatsystemet har ljusglimten färdats en sträcka: $2d$ mellan emission och mottagning av ljusglimten. Ljusets hastighet är igen c, vilket ger tiden mellan ljusglimtens emission och mottagning i raketens koordinatsystem

$$t_{raket} = \frac{2d}{c} \tag{48}$$

Vi ser till vår bestörtning att tiden i laboratoriekoordinatsystemet är längre än tiden i raketens koordinatsystem för samma händelse $\Rightarrow$ **Tiden är inte absolut**.

Att tiden i laboratoriekoordinatsystemet är längre än i raketens koordinatsystem, kan vi förstå eftersom ljuset, som har samma hastighet i alla koordinatsystem, färdas längre i detta system.

Tiden är alltså inte längre **invariant**. Vi kan nu definiera en ny invariant storhet kallad **intervall**

$$\boxed{(\text{intervall})^2 = (\text{tidsseparationen})^2 - \frac{(\text{rymdseparationen})^2}{c^2} = (t)^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2 \qquad (49)}$$

Vilket ger intervallet i laboratoriekoordinatsystemet

$$(intervall)^2 = \frac{4}{c^2}\left[d^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{x}{c}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{4d^2}{c^2}}}$$

och intervallet i raketens koordinatsystem

$$(intervall)^2 = \frac{4d^2}{c^2} - \left(\frac{x'}{c}\right)^2 = \frac{4d^2}{c^2} - 0 = \underline{\underline{\frac{4d^2}{c^2}}}$$

Vi skall nu se vad förhållandet mellan tiderna i de två systemen var

$$\frac{t_{lab}}{t_{raket}} = \frac{\frac{2}{c}\left[d^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right]^{1/2}}{\frac{2d}{c}} = \left[1 + \left(\frac{x}{2d}\right)^2\right]^{1/2}$$

Sträckan $x = t_{lab}v$ och $2d = t_{raket}c$, vilket ger

$$\begin{aligned} \left(\frac{t_{lab}}{t_{raket}}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{t_{lab}v}{t_{raket}c}\right)^2 \\ &\Rightarrow \\ \left(\frac{t_{lab}}{t_{raket}}\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) &= 1 \\ &\Rightarrow \\ \frac{t_{lab}}{t_{raket}} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \end{aligned}$$

Tidsintervallen mellan två referenssysten är alltså lika ifall $v = 0$, men när v närmar sig ljusets hastighet blir tidsintervallet mycket längre i laboratoriekoordinatsystemet.

1.3.2 Tidsdilation

Tiden går olika i raketsystemet jämfört med laboratoriesystemet. Ett tidsintervall t'_2 - t'_1 i raketsystemet verkar kortare i laboratoriesystemet

$$\boxed{\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (50)}$$

Exempel: Vi har två tvillingar, Terra och Astra, som båda är 20 år gamla då Astra startar med en raket från jorden. Astras raket färdas med en exceptionell hastighet av $0.98c$. Då 5 år har förlöpt enligt Astras klocka i raketen, återvänder han till jorden. Hur mycket har hans tvillingbror Terra åldrats?

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5 \text{ år}}{\sqrt{1 - (\frac{0.98c}{c})^2}} \approx \underline{\underline{25 \text{ år}}}$$

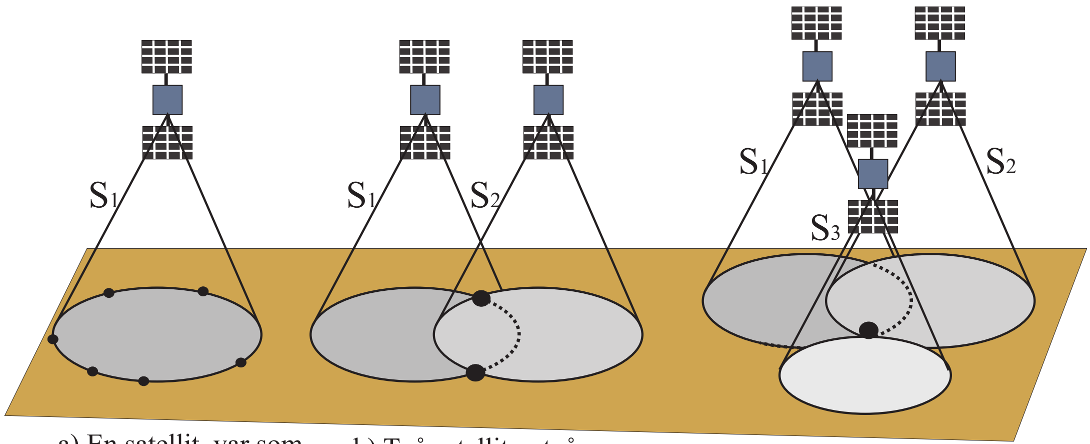
Astra är alltså 25 år och Terra 45 år efter raketfärden.

1.3.3 Global Positioning System (GPS)

Iden till GPS kom när Sovjetunionen sköt den första konstgjorda satelliten Sputnik i rymden 1957. Två amerikanska fysiker beslutade på egen hand att övervaka Sputniks radiosändningar, och insåg att på grund av Dopplereffekten kunde man precisera satellitens position. Sedan kan man vända på problemet och försöka bestämma var man är då man vet positionen för satelliten. Satelliten skickar kontinuerligt elektromagnetisk signal med följande data

- Tiden då signalen sänds från satelliten
- Satellitens position då signalen sänds

Mottagaren kan från signalerna beräkna avståndet (S_1) till satelliten med hjälp av ljustets hastighet. Med signalen från bara en satellit kan man bara bestämma att man befinner sig på en cirkel vars avstånd till satelliten är konstant S_1, a) fallet i figuren. Då avståndet till två satelliter är kända, finns bara två möjliga positioner kvar. Med tre satelliter är det möjligt att bestämma en unik position ifall GPS-mottagaren har enormt noggrann klocka. Vanligen är tidsbestämningen i GPS-apparater inte tillräckligt bra, så man använder fyra satelliter för att bestämma positionen.



a) En satellit, var som helst på cirkeln
b) Två satelliter, två olika positioner
c) Tre satelliter, unik position

Hur påverkar relativismen GPS-systemet? På grund av satellitens fart, $v_{sat} \approx$ 14000 km/s $\approx$ 3900 m/s, kommer satellitens klocka att gå långsammare än på jorden. På grund av gravitationen går också tiden olika. Ifall gravitationen är stor går tiden långsammare. I filmen *Interstellar 2014* går tiden mycket långsammare på en vattenplanet nära svarta hålet, *Gargantua*, än på rymdskeppet långt därifrån. Ett dygn (24 $\cdot$ 3600 s = $t_{jord} = 86400$ s) på jorden blir i satelliten lite kortare:

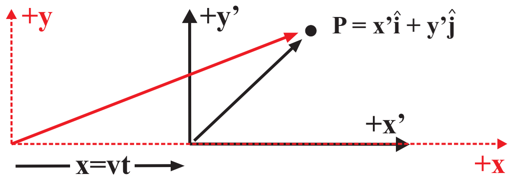
$$t_{sat} = t_{jord}\sqrt{1-\left(\frac{v_{sat}}{c}\right)^2} \approx 86400\ s\sqrt{1-\left(\frac{3900}{3\times 10^9}\right)^2} \approx 86399.99999269919\ s \quad (51)$$

$$\Rightarrow \Delta t = t_{jord} - t_{sat} \approx 7.3008122853\times 10^{-6}\ s \approx 7\mu s \quad (52)$$

Alltså går klockan ca. 7 μs långsammare i satelliten p.g.a farten. På grund av gravitationen går tiden däremot snabbare i satelliten än på jorden, d.v.s ca. 45 μs snabbare. Totalt går alltså satellitens klocka ca. 38 μs snabbare än på jorden, vilket betyder att avståndet (S_1) till satelliten blir ca. 38 $\mu s \cdot$ 3$\times$10^8 m/s $\approx$ 11.4 km fel/dag. Så vi ser tydligt att utan relativitetsteorin skulle inte GPS fungera.

1.3.4 Lorentz transformation

Då vi gjorde Galilei transformationen som relaterar plats och hastighet i ett koordinatsystem till ett annat som rör sig med en konstant hastighet, antog vi att tiden är samma för båda koordinatsystemen. Vi antog att en tidssignal kan sändas från ett koordinatsystem till ett annat ögonblickligen, med oändlig hastighet. Nu vet vi att den maximala hastigheten för en signal är begränsad av ljusets hastighet c. Vi har som tidigare ett laboratoriekoordinatsystem med koordinaterna x, y, z och t, och ett annat koordinatsystem koordinaterna x', y', z' och t' som rör sig med hastigheten v i x-riktning relativt till laboratoriekoordinatsystemet.



Nu blir inte bara koordinaten x transformerad, utan också tiden t. Vi tittar först på en partikel som står stilla i x', y', z' koordinatsystemet; $x' = 0$. Från tidigare såg vi att storheten **intervallet** är samma för båda koordinatsystemen

$$\begin{aligned}(\text{intervall})^2 &= (\text{tidsseparationen})^2 - \frac{(\text{rymdseparationen})^2}{c^2} \\ &= (t)^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2 = (t')^2 - \left(\frac{x'}{c}\right)^2 = (t')^2\end{aligned}$$

Vi insätter $x = vt$ och får

$$t^2 - \frac{v^2t^2}{c^2} = t'^2 \qquad \Rightarrow t^2 = \frac{t'^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\boxed{t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \tag{53}$$

Inversa värdet av kvadratroten, som bara beror av koordinatsystemens relativa hastighet v kallas för **gamma**-faktor

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \tag{54}$$

I allmänna fall är $x' \neq 0$ och intervallets invarians ger

$$(\text{intervall})^2 = (t)^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2 = (t')^2 - \left(\frac{x'}{c}\right)^2$$

Insättning av Ekv. (53) och (54) ger efter lite manipulation ekvationerna för **inversa Lorentz transformation**

$$x = \gamma(x' + vt') \tag{55}$$
$$y = y' \tag{56}$$
$$z = z' \tag{57}$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \tag{58}$$

Med dessa ekvationer får man koordinaterna mätt i ett koordinatsystem som rör sig med hastigheten v, omvandlat till koordinaterna i ett annat koordinatsystem.

Vi får motsvarande **Lorentz transformation** som transformerar laboratoriekoordinaterna till koordinatsystemet som rör på sig. I detta fall verkar det för koordinatsystemet som rör på sig att laboratoriekoordinatsystemet avlägsnar sig med hastigheten $-v$.

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{59}$$
$$y' = y \tag{60}$$
$$z' = z \tag{61}$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \tag{62}$$

1.3.5 Fitzgerald-Lorentz kontraktion

Betrakta en raket som rör sig med hastigheten v relativt till en observatör i vila. Raketens längd i raketens koordinatsystem är L' = x'_2 - x'_1, och i laboratoriekoordinatsystemet L = x_2 - x_1. Vi insätter x'_2 och x'_1 från Ekv. (59) och får

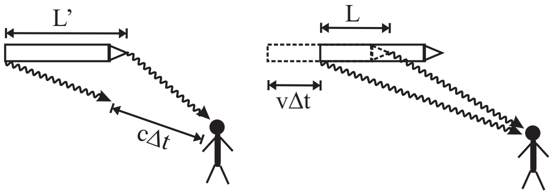
$$L' = \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1)$$

Ifall x_2 och x_1 mäts samtidigt i laboratoriekoordinatsystemet: t = t_1 = t_2 får vi

$$L' = \gamma x_2 - \gamma vt - \gamma x_1 + \gamma vt = \gamma(x_2 - x_1)$$

Detta ger att längden L' i raketens koordinatsystem uppfattas som längden $L = x_2 - x_1$ i laboratoriekoordinatsystemet

$$L = L'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{63}$$



Visuellt kan man förstå detta genom att betrakta situationen i bilden, där två ljusstrålar från fören och ändan sänds samtidigt i raket koordinatsystemet mot observatören. Till observatören, kommer ljusstrålen från fören först och från ändan Δt senare. Observatören uppfattar längden av raketen från de signalerna från fören och ändan som **samtidigt i hans system** träffar ögat. I den högra delen av bilden ser vi att i det ögonblicket då ljusstrålen från ändan äntligen träffar observatören, träffar ljuset från fören, då raketen var $v\Delta t$ längre från observatören. Detta uppfattas av observatören som att raketen är kortare än den på riktigt är.

1.3.6 Relativistisk transformation av hastigheterna (inte till prov)

Vi kan inte mera transformera en hastighet u_x i laboratoriet till en hastighet u'_x i raketen som rör sig med hastigheten v relativt till laboratoriet genom att derivera Galileitransformationen av platsen som

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ \Rightarrow u'_x &= \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x-vt)}{dt} = u_x - v \end{aligned}$$

eftersom tidsdifferentialerna dt och dt' i de två systemen inte är samma längre.

Betrakta de två koordinatsystemen ovan, där x',y' rör sig med hastigheten v relativt till systemet x,y. Lorentz transformationerna för att transformera x och t koordinaterna är, se Ekv. (59) och (62)
$x' = \gamma(x - vt)$
$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$
Vi deriverar båda med avseende av tiden t i x,y koordinatsystemet och får:

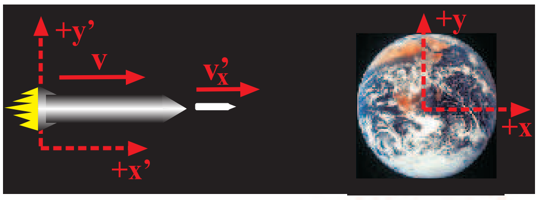
$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\gamma(x - vt)\right] = \gamma\left(\frac{dx}{dt} - v\right) \\ \frac{dt'}{dt} &= \gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right) \end{aligned}$$

Dessa sätts sedan in i uttrycket för hastighet av en kropp i x',y' systemet

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\left(\frac{dx'}{dt}\right)}{\left(\frac{dt'}{dt}\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \tag{64}$$

Denna ekvation kallas för Lorentz hastighetstransformation, som transformerar en kropps hastighet u_x i koordinatsystem x, y, z, till en hastighet u'_x i ett annat koordinatsystem som rör sig med hastigheten v relativt till det första koordinatsystemet.

Exempel: Ett rymdskepp som närmar sig jorden med hastigheten $0.40c$ avfyrar en missil mot jorden med hastigheten $0.80c$ relativt till rymdskeppet. Vad är missilens hastighet i jordens referenssystem?



Vi kan lösa ut missilens hastighet i jordens referenssystem från Ekv. (64)

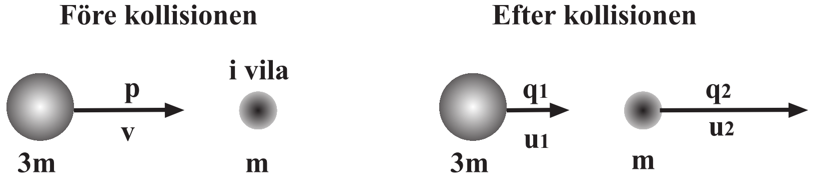
$$\begin{aligned}
u'_x\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right) &= u_x - v \\
u'_x - \frac{u'_x u_x v}{c^2} - u_x &= -v \\
u_x\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right) &= u'_x + v \\
\Rightarrow u_x &= \frac{u'_x + v}{1+\frac{u'_x v}{c^2}} \\
&= \frac{0.8c+0.4c}{1+\frac{0.8c\cdot 0.4c}{c^2}} \approx \underline{\underline{0.91c}} \qquad (65)
\end{aligned}$$

Enklare blir det då man inser att jordens hastighet till raketen är $v = -0.50c$, vilket ger efter insättning i ekvation (64) missilens hastighet relativt till jorden

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{u_x v}{c^2}} = \frac{0.4c+0.8c}{1+\frac{0.4c\cdot 0.8c}{c^2}} \approx \underline{\underline{0.91c}}$$

1.3.7 Relativistisk rörelsemängd

Anta att vi vill beräkna vad som händer vid den elastiska kollisionen i bilden.



Rörelsemängdens bevarande ger ekvationen: $p = q_1 + q_2 \quad \Rightarrow \quad q_1 = p - q_2$, vilket insätts i ekvationen för energins bevarande

$$\begin{aligned}
\frac{p^2}{2(3m)} &= \frac{q_1^2}{2(3m)} + \frac{q_2^2}{2m} = \frac{(p-q_2)^2}{2(3m)} + \frac{q_2^2}{2m} \\
&= \frac{p^2}{2(3m)} - \frac{pq_2}{3m} + \frac{q_2^2}{2(3m)} + \frac{q_2^2}{2m} = \frac{p^2}{2(3m)} - \frac{pq_2}{3m} + \frac{4q_2^2}{2(3m)} \\
\Rightarrow & \\
0 &= \frac{q_2}{3m}\left(\frac{4q_2}{2} - p\right) \\
\Rightarrow q_2 &= \frac{p}{2} \qquad \Rightarrow \qquad u_2 = \frac{3}{2}v
\end{aligned}$$

Nu ifall v är $0.8c$, rör sig massan m med en hastighet som är större än ljusets, $u_2 = 1.2c$. Ingen signal eller massa kan enligt relativitetsprincipen röra sig snabbare än ljus i vakuum, vilket leder till att rörelsemängdens bevarande är i konflikt med relativitetsprincipen!

Rörelsemängdens bevarande kom från Newtons lagar, som därmed också är i konflikt med relativitetsprincipen, som säger att **Fysikens lagar har samma form i alla referenssystem.** Detta betyder alltså att i referenssystemet O är $F = \frac{dp}{dt}$, och samtidigt i ett annat referenssystem som rör sig relativt till O måste ekvationen ha samma form: O': $F' = \frac{dp'}{dt'}$. Dessa krav uppfylls ifall vi definierar rörelsemängden som

$$\boxed{\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (66)$$

I detta fall kan hastigheten för en massa m aldrig överskrida hastigheten för ljus i vakuum,[5] vilket vi kan se ifall vi separerar hastigheten v i föregående ekvation

$$\begin{aligned}
p^2 &= \frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = \frac{p^2}{m^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{p^2}{m^2} - \frac{p^2v^2}{m^2c^2} \\
& v^2\left(1+\frac{p^2}{m^2c^2}\right) = \frac{p^2}{m^2}
\end{aligned}$$

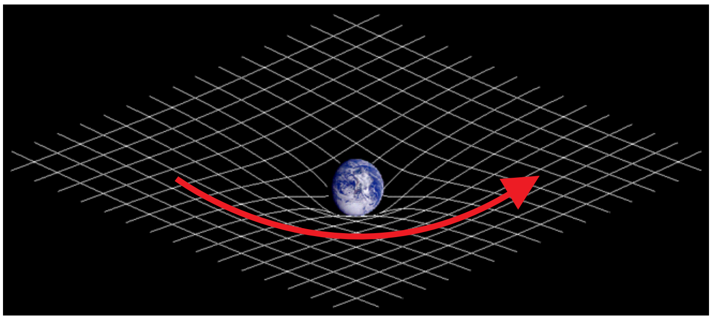
[5] Hastigheten för en partikel kan överskrida ljusets hastighet i ett medium där ljusets hastighet är mindre än ljusets hastighet i vakuum

$$\Rightarrow v^2 \quad = \quad \frac{p^2/m^2}{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} = \frac{c^2}{\frac{m^2c^2}{p^2} + 1} < c^2$$

1.3.8 Den allmänna relativitetsteorin

Den speciella relativitetsteorin gäller inte för kroppar i gravitationsfält eller accelererad rörelse, vilket däremot den allmänna relativitetsteorin gör.

Enligt Einsteins postulat, känner en kropp i närheten av ett massivt objekt ingen kraft, utan kroppen har en krökt bana p.g.a. att rymden är krökt. Experimentellt har man visat att ljus, utan massa, blir krökt då den passerar ett massivt objekt, i enlighet med allmänna relativitetsteorin. Enligt Newtons lagar borde detta inte ske. Newtons gravitationslag är alltså en fiktiv kraft (liksom corioliskraften), som ger samma effekt för kroppars rörelse i ett euklidiskt koordinatsystem, som kroppen rör sig i den krökta tidsrymden.



Figur 14: Ljuset bana kring ett massivt objekt är krökt fastän ljuset inte har massa.