0 Introduktion

0.1 Vad är Fysik?

Fysik är en naturvetenskap som undersöker omgivningen omkring oss och försöker förstå den. Fysik är på ett sätt den mest fundamentala naturvetenskapen, för att den inrymmer allt mellan de minsta tänkbara elementarpartiklarna till hela universum.

Varför Fysik?

Människan har alltid varit intresserad av omgivningen. Vi är ganska sårbara jämfört med rovdjur. I motsats till kraft, har naturen gynnat utveckling av en stor och komplicerad hjärna för människan som hjälpt oss att förstå vår omgivning. Denna förståelse har sedan hjälpt oss i kampen om överlevnad genom att vi kunnat använda olika redskap och vapen.

Efter att hungern är stillad, har människan alltid försökt förstå världen omkring sig. Kineserna har under 1000 år följt med och skrivit ned när Halleys komet har dykt upp på himlen.

Vår omgivande värld är **förutsägbar**: en pil som skjuts på samma sätt, har samma bana och plats den träffar, och kompassnålen pekar alltid mot den magnetiska nordpolen.

Varför är fysik viktigare nuförtiden än förut? Våra urtida förfäder behövde bara sina sinnen (syn, hörsel, känsel ..) för att förstå sin omgivning och klara sig i naturen. Den moderna tidens krav på att bättre kunna utveckla vår omgivning, har gjort att våra sinnen inte mera räcker till att få information om världen runt oss. Vi har byggt och utvecklat känsliga detektorer för att få information som inte är möjligt att få direkt via våra sinnen. Vi kan bygga maskiner som är starkare än vi själva är o.s.v. Fysiken kan förklara en del av de otaliga under som sker i vår omgivning:

- Vad är solen? Varför kretsar jorden kring solen?
- Varför hålls materia ihop?
- Varför är himlen blå, varför är kvällssolen röd?
- Varför kan det finnas liv på jorden?
    1. Lagom stor sol (för liten ger inte tillräckligt värme, för stor brinner för snabbt)
    2. Jorden kretsar på lämpligt avstånd i en cirkelbana runt solen
    3. månen stabiliserar jordens bana
    4. Magnetfällt som skyddar mot rymdstrålningen (flytande kärna)
    5. En tyngre planet utanför jordens bana som stoppar kometer (Jupiter)
    6. Jorden lämpligt stor så att syre finns kvar

Varför behöver man matematik i fysiken?

Matematiken är fysiken språk. Ifall man inte kan läsa, vad för nytta har man av en bok?

0.2 Avrundning och Felgränser

Då man löser fysikaliska problem, hamnar man ofta att beräkna numeriska resultat. För att undvika att avrundningsfel görs många gånger, följer man dessa regler:

- Insättning av värdena i formlerna görs så sent som möjligt
- Mellanvärden beräknas med så många decimaler som möjligt, och först svaret avrundas.

Svaret och felgränsen skall oftast ges med samma noggrannhet som begynnelsevärdet.

Exempel: Beräkna sträckan som ett föremål med hastigheten: v = 2.31 m/s tillryggalägger på tiden t = 2.2 s.

Ekvationen som ger sträckan är:

$$s = v \cdot t = 2.31\ m/s \cdot 2.2\ s = 5.082\ m$$

och svaret ges som: $\underline{\underline{s = 5.1\mathrm{m}}}$

Felgränserna kan också beräknas med den så kallade *15 enhets regeln*

Exempel: Vi har resultatet och felapproximationen för x

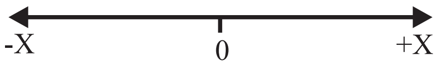
$$\begin{aligned} x &= 0.00123456\ m \\ \Delta x &= 0.000123\ m \end{aligned}$$

Skall nu x ges med noggrannheten 0.001234, alltså skall 4:n tas med? Ifall den tas med är felet för denna decimal: 123 enheter, vilket är **större** än 15 $\Rightarrow$ 4:n tas inte med. Skall 3:n tas med? Felet för denna decimal är 12 enheter vilket är **mindre** än 15, så trean tas med. Svaret ges alltså som

$$\begin{aligned} \Rightarrow Svar : x &= 0.00123 \pm 0.00012\ m \\ &= \underline{\underline{(1.23 \pm 0.12)\ mm}} \end{aligned}$$

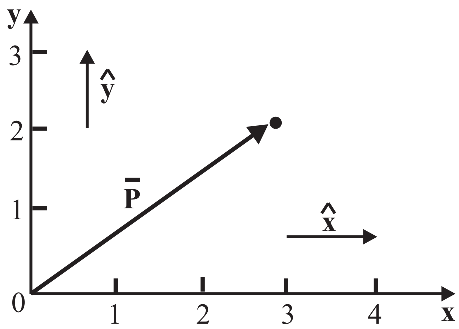
0.3 Vektorer

Fysiken använder irrationella tal, vilka kan representeras med en linje från $-\infty$ till $+\infty$



Figur 1: X-axeln, som går från minus oändligheten till oändligheten.

I fysiken behöver man alltid en referenspunkt (tid och rum). En punkt i rummet ges då av tre rymdkoordinater och en tidskoordinat. I figuren ser vi hur en punkt i ett koordinatsystem med två dimensioner ges av en vektor $\vec{P} = 3\hat{x} + 2\hat{y}$ eller $\vec{P} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, där $\hat{x}$ eller $\hat{\imath}$ och $\hat{y}$ eller $\hat{\jmath}$ är enhetsvektorer i x, respektive y riktning.



Figur 2: En punkt ges av vektorn $\vec{P}$ som har både riktning och magnitud.

Förr definierades 1s som en 60x60x24 del av en dag (en punkt på himlen där solen passerar). Jordens hastighet förändras hela tiden, snabba och långsamma (haven gör att rotationen saktar in).

$\Rightarrow$ <u>Vissa år har den sista minuten den 31 december 61 s !</u>

Mätaren i en bil som anger dess fart (magnituden för hastigheten), kallas ofta felaktigt för "hastighetsmätare".

Frågor:

1. En båt startar från hamnen A och passerar en ö på vänstra sidan innan den kommer till hamnen B. En annan båt, som också startar från hamnen A, passerar däremot ön på östra sidan innan den kommer till hamnen B. Är förflyttningsvektorn samma för båda båtarna?

2. Ett flygplan flyger från Helsingfors till Åbo och tillbaka. Är förflyttningsvektorn noll då referenspunkten är Helsingfors? Då referenspunkten är månen?

3. Har en vektor med noll magnitud riktning? Har det betydelse ifall den hade riktning?

4. Två vektorer har båda magnituden större än noll. När är deras summa noll? Deras skillnad noll?

Exempel: Ett flygplan flyger från en stad till en annan genom att först flyga 13.3 km till öst, och sedan 7.2 km norrut. Vad är resulterande förflyttningsvektorn?

$$\begin{aligned}\vec{V}1 &= 13.3\,km\,\hat{x} + \quad 0\,km\,\hat{y}\\ \vec{V}2 &= \quad 0\,km\,\hat{x} + 7.2\,km\,\hat{y}\end{aligned}$$

Vi summar vektorerna:

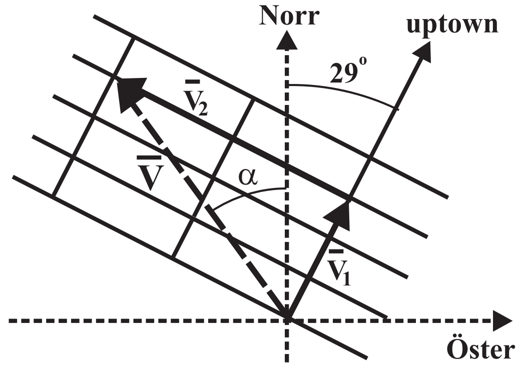
$$\vec{V} = \vec{V}1 + \vec{V}2 = \underline{\underline{(13.3\,\hat{x} + 7.2\,\hat{y})\ \mathrm{km}}}$$

Exempel: I Manhattans centrum är kvarteren fyrkanter med bredden 80 m och längden 280 m, där den korta sidan bildar 29° vinkel (mot nordost 'uptown') med vektorn mot norr. Anta att du promenerar tre kvarter nordost och sedan två kvarter till vänster. Vad är magnituden och vinkeln för förflyttningsvektorn?

$$\begin{aligned}\vec{V_1} &= 3\cdot 80[sin(29)\,\hat{x} + cos(29)\,\hat{y}]\\ \vec{V_2} &= 2\cdot 280[-cos(29)\,\hat{x} + sin(29)\,\hat{y}]\\ \vec{V} &= \vec{V_1} + \vec{V_2} \approx -373.4\,\hat{x} + 481.4\,\hat{y}\\ |\vec{V}| &\approx \sqrt{(-373.4)^2 + 481.4^2} \approx \underline{\underline{609.3\ \mathrm{m}}}\\ tan(\alpha) &\approx \frac{373.4\,m}{481.4\,m} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 37.8^\circ}}\end{aligned}$$

Sätt 2: Enhetsvektor i y-riktningen: $\vec{EY} = (0\,\hat{i} + 1\,\hat{j})$

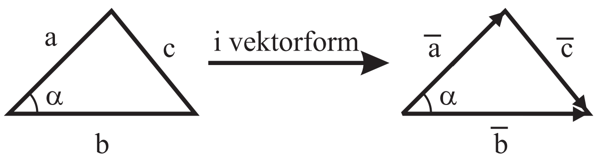
$$\Rightarrow cos(\alpha) = \frac{\vec{EY}\cdot\vec{V}}{|\vec{EY}||\vec{V}|} \approx \frac{0 + 481.4}{1\cdot 609.3} \Rightarrow \alpha \approx \underline{\underline{38^\circ}}$$



Punktprodukt eller skalärprodukt av vektorer

$$
\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{B} &= |\vec{A}||\vec{B}|\cdot cos(\alpha) && (1)\\
\vec{A}\cdot\vec{B} &= \vec{B}\cdot\vec{A} && (2)\\
\vec{A}\cdot\vec{A} &= A^2 && (3)\\
\hat{i}\cdot\hat{i} &= \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 && (4)\\
\hat{i}\cdot\hat{j} &= \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0 && (5)\\
\vec{A}\cdot\vec{B} &= (A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k})\cdot(B_x\,\hat{i} + B_y\,\hat{j} + B_z\,\hat{k}) &&\\
&= A_xB_x\,\hat{i}\cdot\hat{i} + A_xB_y\,\hat{i}\cdot\hat{j} + A_xB_z\,\hat{i}\cdot\hat{k} + ... &&\\
&= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z && (6)
\end{aligned}
$$

Exempel: Bevisa cosinus regeln: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\;cos(\alpha)$

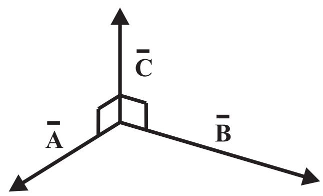


I vektorform ser vi att $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$, eller att $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$, och vi får:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow c^2 &= |\vec{c}|^2 = \vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{b}^2 - 2\,\vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{a}^2 &&\\
&= a^2 + b^2 - 2\;a\cdot b = a^2 + b^2 - 2ab\;cos(\alpha)\;\Box && (7)
\end{aligned}
$$

Vektorprodukt eller kryssprodukt av vektorer

Kryssprodukten $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$ är en vektor, där längden $|\vec{C}| = |\vec{A}|\;|\vec{B}|\;sin(\alpha)$



$$
\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B} &= -\vec{B}\times\vec{A} && (8)\\
\hat{i}\times\hat{i} &= 0 && (9)\\
\hat{i}\times\hat{j} &= \hat{k} && (10)\\
\hat{k}\times\hat{i} &= \hat{j} && (11)\\
\hat{j}\times\hat{k} &= \hat{i} && (12)\\
\vec{A}\times\vec{B} &= (A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k})\times(B_x\,\hat{i} + B_y\,\hat{j} + B_z\,\hat{k}) &&\\
&= A_xB_x\,\hat{i}\times\hat{i} + A_xB_y\,\hat{i}\times\hat{j} + A_xB_z\,\hat{i}\times\hat{k} + ... &&\\
&= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} && (13)
\end{aligned}
$$

1 Växelverkning och rörelse

1.1 Rörelse i en dimension

Vad händer med en boll då man kastar den? Med vilken hastighet träffar man vattenytan då man dyker från 5 m? I detta kapitlet försöker vi finna ekvationer, med vilka vi kan beskriva rörelse av föremål i en dimension. Denna del av mekaniken, som beskriver rörelse kallas för *kinematik*. Först tittar vi noggrannare på hur observationer av ett fysikaliskt fenomen blir till en matematisk ekvation.

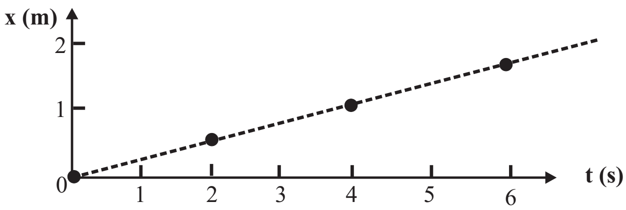
1.1.1 Den vetenskapliga metoden

Låt oss betrakta situationen där ett föremål rör sig, och vi mäter dess position som en funktion av tiden.

Experiment

Föremålet rör sig i tid och rum, så vi behöver enheter för längd (m) och tid (s). Vid tiden $t = 0$ s, sätter vi att föremålets position är 0 m. Efter detta ger experimentet följande data och graf:

t (s)	x (m)
0	0
2	0.5
4	1.0
6	1.5



Modell

Nästa steg är att försöka beskriva rörelsen av objektet med en matematisk **modell**. Vi ser att positionen ändras linjärt med tiden, så vi gissar att den **matematiska representationen** kunde ges av en rak linje

$$x = A\,t + B \tag{14}$$

där A och B är konstanter. Grafen ger att B = 0 och att A = $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1.5\ m}{6\ s}$ = 0.25 m/s.
$\Rightarrow$ x = 0.25 m/s $\cdot$ t

Denna modell fungerar bra åtminstone för tider mindre än 6 s, ty t.ex. vid t = 3.0 s ger formeln att positionen är 0.75 m vilket stämmer bra med grafen. För att nu testa om vår modell är rätt, borde vi fortsätta mäta objektet och se ifall den fortfarande beskrivs av den matematiska modellen. Då man försöker beskriva ett fysikaliskt fenomen med en modell, kan många olika modeller beskriva situationen tillfredställande. I denna situation, borde man välja modellen som är den enklaste. Denna metod att *Använda den enklaste möjliga antagande för att beskriva ett fenomen* kallas **Occams rakkniv** efter den medeltida munken: William av Occam.

1.1.2 Hastighet

Parametern *A*, som på föregående sida bestämdes vara 0.25 m/s, är objektets **hastighet**, vilket tillsammans med **acceleration** är viktiga begrepp inom mekaniken.

Hastigheten för en kropp definieras som:

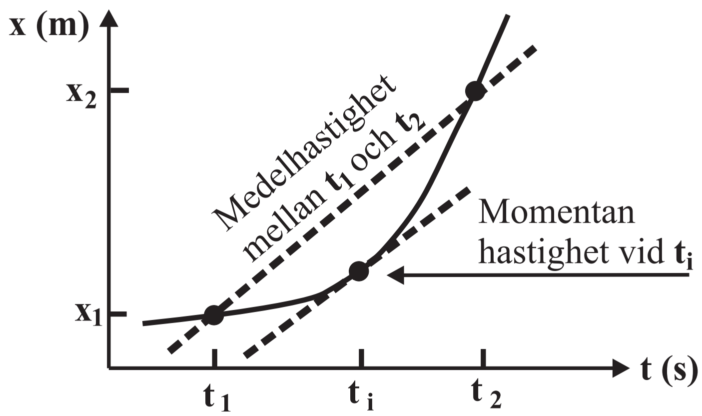
$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \qquad [v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{15}$$

I en *t*-*x*-graf ges hastigheten vid en viss tidspunkt av **derivatan** eller *tangenten* till *t*-*x*-kurvan (se figur). Ofta definieras också **medelhastigheten** för ett objekt mellan två tider t_1 och t_2 som

$$< \mathbf{v} >= \frac{\text{distans}}{\text{tid}} = \frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta t}, \tag{16}$$

där Δt = t_2 - t_1 och $\Delta\mathbf{x}$ = $\mathbf{x}_2$ - $\mathbf{x}_1$. Denna medelhastighet ges grafiskt av en linje som passerar punkterna: x_1, t_1 och x_2, t_2, se figuren nedan.

Hastigheter	m/s
ljus	3×10^8
elektron (H)	2.2×10^6
kretsande satellit	3000
pistol kula	700
ljud	330
människa	12
glaciär	10^{-6}
människohår	3×10^{-9}
kontinental drift	10^{-9}



Exempel: Vad är en 100 m löpares medelfart på sträckan?

Sträckan 100 m löps på ca. 10 s $\Rightarrow < \mathbf{v} > = \frac{100\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{s}} = \underline{\underline{10\ \mathrm{m/s}}}$

Exempel: Med vilken hastighet rör sig jorden runt solen, då medelavståndet mellan jorden och solen är 1.5×10^8 km?

Sträckan runt solen blir då: s = $2 \cdot \pi \cdot 1.5\times10^8$ km $\approx 9.42\times10^8$ km. Denna sträcka färdas jorden på ett år: t = $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ s $\approx 3.15\times10^7$ s,[1] vilket ger medelhastigheten

$$< \mathbf{v} > \;=\; \frac{9.42\times10^8\ \mathrm{km}}{3.15\times10^7\ \mathrm{s}} \approx \underline{\underline{30\ \mathrm{km/s}\ (\approx 100000\ \mathrm{km/h})}}$$

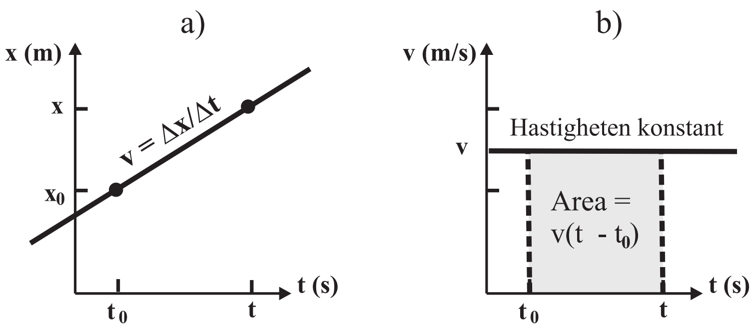
[1] Hur stort procentuellt fel gör man ifall antalet sekunder i ett år approximeras vara $\pi\times10^7$s?

Exempel: Härled **rörelseekvationen** (position som en funktion av tiden) för endimensionell rörelse med konstant hastighet: v = konstant*

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt$$

$$\begin{aligned}\int_{x_\circ}^{x} dx' &= \int_{t_\circ}^{t} v \cdot dt' =^{*} v \int_{t_\circ}^{t} dt' \\ x - x_\circ &= v(t - t_\circ)\end{aligned}$$

$$\boxed{x = x_\circ + v(t - t_\circ) \qquad v \text{ konstant}} \tag{17}$$



Figur 3: a) Rörelseekvationen och b) förflyttningen för objektet då hastigheten är konstant hela tiden.

1.1.3 Acceleration

Accelerationen för ett föremål definieras liknande som hastigheten:

$$\boxed{\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \qquad [\mathbf{a}] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \tag{18}$$

Accelerationer	m/s^2
protoner i Fermilab accelerator	10^{14}
bilkrock (100 km/h) med en vägg	10^3
gravitationen på solens yta	300
människan förlorar medvetandet	70
gravitationen på jorden	9.8
gravitationen på månen	1.7
rotationen vid jordens ekvator	3.4×10^{-2}

Exempel: Härled rörelseekvationen för rörelse med **konstant acceleration: a = dv/dt = konstant**

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \cdot dt$$

$$\int_{v_\circ}^{v} dv' \quad = \quad a \int_{t_\circ}^{t} dt'$$

$$\boxed{v = v_\circ + a(t - t_\circ) \qquad a \text{ konstant}} \tag{19}$$

Likadant med x:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_\circ}^{x} dx' &= \int_{t_\circ}^{t} v(t') \cdot dt' \\
x - x_\circ &= \int_{t_\circ}^{t} (v_\circ + a(t' - t_\circ)) \cdot dt' \\
x - x_\circ &= v_\circ \int_{t_\circ}^{t} dt' + a \int_{t_\circ}^{t} (t' - t_\circ) dt' \\
x - x_\circ &= v_\circ(t - t_\circ) + a\Big|_{t_\circ}^{t} \frac{(t' - t_\circ)^2}{2} \\
x - x_\circ &= v_\circ(t - t_\circ) + \frac{a}{2}\left[(t - t_\circ)^2 - (t_\circ - t_\circ)^2\right] \\
x - x_\circ &= v_\circ(t - t_\circ) + \frac{a}{2}(t - t_\circ)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{x = x_\circ + v_\circ(t - t_\circ) + \frac{a}{2}(t - t_\circ)^2} \tag{20}$$

Ifall $t_\circ = 0$, får vi kortare:

$$\boxed{x = x_\circ + v_\circ t + \frac{a}{2} t^2} \tag{21}$$

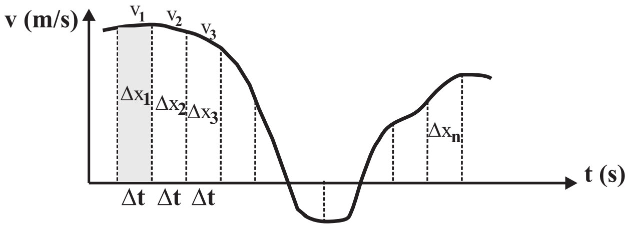
Titta att enheterna stämmer genom derivering:

1. v = $\frac{dx}{dt} = v_\circ + at$
2. a = $\frac{dv}{dt} = a$

Ifall hastigheten är en funktion av tiden, kan man få positionen genom integrering, se Figur. (4):

$$\begin{aligned}\Delta x &= \Delta x_1 \quad + \Delta x_2 \quad + ... + \Delta x_n \\ &= \Delta t \cdot v_1 + \Delta t \cdot v_2 + ... + \Delta t \cdot v_n = \int_0^t v(t')dt'\end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow x = x_\circ + \int_0^t v(t')dt' \qquad (22)}$$



Figur 4: Hastigheten förändras som en funktion av tiden. Positionsförändringen fås genom integrering. Ifall integreringen inte kan utföras analytiskt kan tidsregionen indelas i korta tidsintervall och integrationen görs numeriskt.

På liknande sätt får man hastigheten från integralen av accelerationen

$$\boxed{v = v_\circ + \int_0^t a(t')dt' \qquad (23)}$$

Exempel: Accelerationen för ett föremål som en funktion av tiden ges som: $a(t) = 2t - 3$. Beräkna positionen för föremålet efter 2.0 s, ifall den vid tid t = 0 befinner sig 2.0 m från origo och har begynnelsehastigheten 1.0 m/s.

Vi sätter in accelerationen i Ekv. (23)

$$\begin{aligned}v(t) &= v_\circ + \int_0^t (2t' - 3)dt' \\ &= v_\circ + 2\int_0^t t'dt' - 3\int_0^t dt' \\ &= v_\circ + t^2 - 3t = (t^2 - 3t + v_\circ)\text{ m/s}\end{aligned}$$

Denna hastighet sätts in i Ekv. (22) för att få rörelseekvationen

$$\begin{aligned}x &= x_\circ + \int_0^t (t'^2 - 3t' + v_\circ)dt' \\ &= x_\circ + \int_0^t t'^2 dt' - 3\int_0^t t'dt' + v_\circ \int_0^t dt' \\ &= x_\circ + t^3/3 - 3t^2/2 + v_\circ t\end{aligned}$$

Insättning av begynnelsevärdena: $x_\circ$ = 2 m och $v_\circ$ = 1 m/s ger platsen vid tiden 2 s

$$x = 2 + 8/3 - 6 + 2\, m \approx \underline{\underline{0.6667\text{ m}}}$$

Exempel: Dykarna vid Acapulco (Mexiko) dyker från t.o.m. 36 m höga klippor i havet för att få pengar av turisterna. Med vilken fart träffar en dykare vattnet, ifall begynnelsehöjden är 36 m över havet? Anta att gravitationsaccelerationen $|\vec{g}|$ = 9.8 m/s^2.

Rörelseekvationen för en dykare är, se Ekv. (20): [2] $x = x_\circ + v_\circ(t - t_\circ) - \frac{1}{2}g(t - t_\circ)^2$. Begynnelse-höjden, -tiden och -farten är 36 m, 0 s, respektive 0 m/s, vilket ger rörelse-ekvationen och tiden då dykaren träffar vattnet

$$
\begin{aligned}
x &= 36 - \frac{1}{2}gt^2 \\
\Rightarrow & \\
t &= \sqrt{\frac{2 \cdot 36m}{9.8m/s^2}} \approx 2.7105\ s
\end{aligned}
$$

detta sätts in i hastighetsekvationen som slutligen ger farten vid havsytan

$$
v = \frac{dx}{dt} = -gt \approx -9.8\ \text{m/s}^2\ 2.7105\ \text{s} \approx \underline{\underline{-26\ \text{m/s}\ (\approx\ 94\ \text{km/h})}}
$$

Exempel: Anta att en sten kastas rakt uppåt med begynnelsehastigheten 15 m/s. 2.0 s senare kastas en sten till uppåt med samma begynnelsehastighet. När den första stenen senare börjar falla tillbaka mot marken, möts stenarna. **a)** Vid vilken höjd möts stenarna? **b)** Vad är maximihöjden som stenarna når? Anta att g = 9.8 m/s^2.

a) Rörelseekvationerna för de två stenarna är:

$$
\begin{aligned}
\text{Sten1} : x_1 &= x_\circ + v_\circ(t - t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2 \\
\text{Sten2} : x_2 &= x_\circ + v_\circ(t - t_2) - \frac{1}{2}g(t - t_2)^2
\end{aligned}
$$

$x_\circ = 0$ för båda stenarna och t_1 för sten 1 väljes att vara 0. För sten 2 blir då t_2 = 2 s, och ekvationerna blir:

$$
\begin{aligned}
\text{Sten1} : x_1 &= v_\circ t - \frac{1}{2}gt^2 \\
\text{Sten2} : x_2 &= v_\circ(t - t_2) - \frac{1}{2}g(t - t_2)^2
\end{aligned}
$$

De möts på samma höjd: $x_1 = x_2$, vilket innebär att

$$
\begin{aligned}
v_\circ t - \frac{g}{2}t^2 &= v_\circ(t - t_2) - \frac{g}{2}(t - t_2)^2 \\
v_\circ t - \frac{g}{2}t^2 &= v_\circ t - v_\circ t_2 - \frac{g}{2}(t^2 - 2t \cdot t_2 + t_2^2) \\
v_\circ t - \frac{g}{2}t^2 &= v_\circ t - v_\circ t_2 - \frac{g}{2}t^2 + gt \cdot t_2 - \frac{g}{2}t_2^2 \\
gtt_2 &= v_\circ t_2 + \frac{g}{2}t_2^2
\end{aligned}
$$

[2] Konstant gravitationsacceleration: $\vec{a} = -\vec{g}$

$$\Rightarrow t = \frac{v_\circ}{g} + \frac{t_2}{2} = \frac{15 \text{ m/s}}{9.8 \text{ m/s}^2} + \frac{2\ s}{2} \approx 2.53 \text{ s}$$

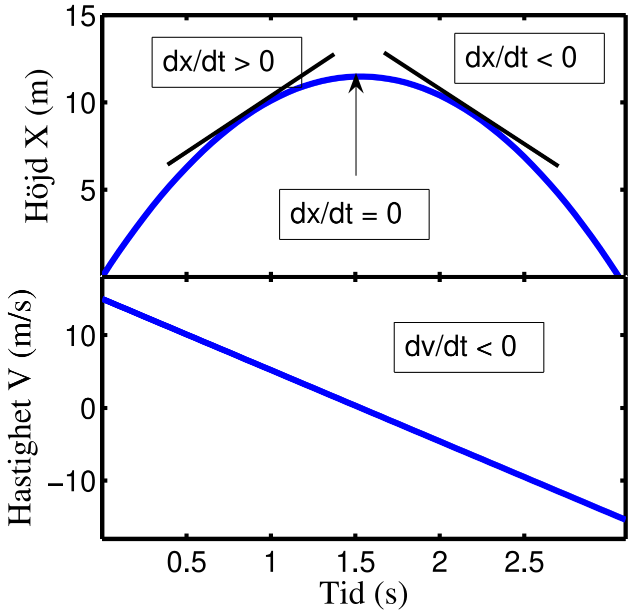
Höjden där de möts blir då

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 &\approx 15 \text{ m/s} \cdot 2.53 \text{ s} - 0.5 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 (2.53 \text{ s})^2 \\ &\approx 2.53 \text{ s} \left[15 \text{ m/s} - 0.5 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 2.53 \text{ s}\right] \\ &\approx \underline{\underline{6.6 \text{ m}}} \end{aligned}$$

b) Sten 1:s rörelseekvation, hastighet och acceleration är

$$\begin{aligned} x_1 &= v_\circ t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_1 &= \frac{dx}{dt} = v_\circ - gt \\ a_1 &= \frac{dv}{dt} = -g \end{aligned}$$

Kroppen befinner sig vid ett lokalt positionsmaximum då dx/dt = 0 = $v_\circ$ - gt.
Detta ger att tiden då stenen är vid maximihöjd är: t = $v_\circ$/g $\approx$ 1.53 s,
vilket ger maximihöjden: maxhöjd = $v_\circ$ - 0.5g(1.53 s)^2 $\approx$ $\underline{\underline{\text{11.48m}}}$



Figur 5: Position och hastighet för sten 1 som en funktion av tiden.

För att titta på lösningarna grafiskt kan följande *Matlab* kod användas:

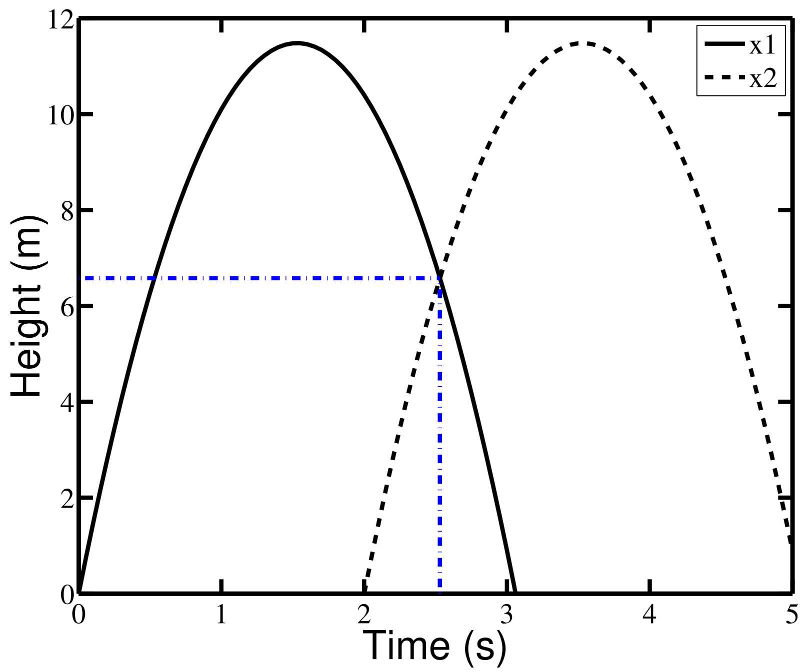
```
V0   = 15;            % Begynnelsehastighet (m/s)
g    = 9.8;           % Gravitationsacceleration (m/s^2)
t    = [0:0.05:5]';   % Tidsvektor (s)
t2   = 2;             % Tidpunkten (s) då sten 2 kastas uppåt
```

```
X1 = V0*t - 0.5*g*t.^2;
X2 = V0*(t-t2) - 0.5*g*(t-t2).^2;

L = plot(t,X1,'k-',t,X2,'k--');

set(L,'LineWidth',2);

xlabel('Time (s)')
ylabel('Height (m)')
legend('X1','X2')
axis([0 5 0 12])
Line = line([2.53065 2.53065],[0 6.5767]);
set(Line,'LineWidth',2,'LineStyle','-.');
Line = line([0 2.53065],[6.5767 6.5767]);
set(Line,'LineWidth',2,'LineStyle','-.');
```

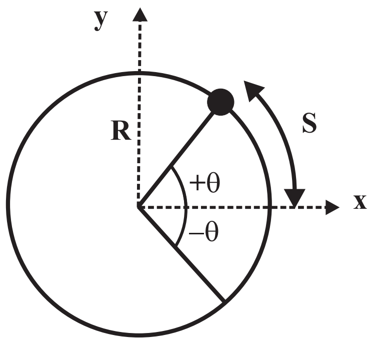


Figur 6: Flyghöjden för de två stenarna som en funktion av tiden.

1.1.4 Vinkelrörelse

Rörelse för en massa i en cirkel kan inte beskrivas i x- och y-koordinatsystemet i en dimension. För att ändå få cirkelrörelse beskriven som endimensionellt, definierar vi vinkeln θ som sträckan längs cirkeln, **S** mellan två punkter på cirkeln dividerat med cirkelns radie **R**

$$\boxed{\theta = \frac{S}{R} \qquad [\theta] = \text{rad} \qquad (24)}$$



Vi ser att enheten för vinkeln θ är m/m, alltså dimensionslöst. Enheten för θ kallas ändå för radian. x- och y-koordinaterna kan sedan fås från:

$$x = R\,cos(\theta) \qquad (25)$$
$$y = R\,sin(\theta) \qquad (26)$$

För *linjärrörelse* motsvarande **hastighet och acceleration**, kan vi definiera **vinkelhastighet och vinkelacceleration**

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad [\omega] = \text{rad/s} \qquad (27)$$
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad [\alpha] = \text{rad/s}^2 \qquad (28)$$

Vidare får den roterande kroppens *fart* från

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{S}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{dS}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$\boxed{\rightarrow v = R\omega \qquad (29)}$$

Liknande fås också accelerationen:

$$a = R\alpha \tag{30}$$

Vinkelrörelse och linjärrörelse ges med liknande ekvationer

Translation	Rotation
v = konstant	Vinkelhastigheten: ω = konstant
$x \ = \ x_\circ \ + \ v(t - t_\circ)$	$\theta \ = \ \theta_\circ \ + \ \omega(t - t_\circ)$
a = konstant	Vinkelacceleration: α = konstant
$x \ = \ x_\circ \ + \ v_\circ(t - t_\circ) \ + \ \frac{a}{2}(t - t_\circ)^2$	$\theta \ = \ \theta_\circ \ + \ \omega_\circ(t - t_\circ) \ + \ \frac{\alpha}{2}(t - t_\circ)^2$
$v \ = \ v_\circ \ + \ a(t - t_\circ)$	$\omega \ = \ \omega_\circ \ + \ \alpha(t - t_\circ)$

1.2 Relativ rörelse

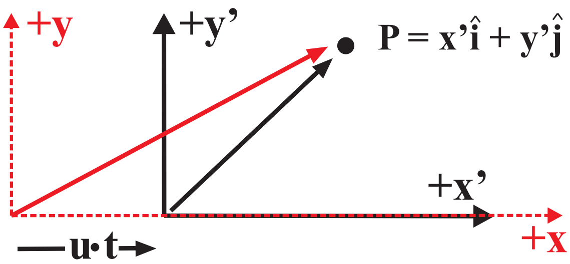
Hastigheten på en kropp mätt av olika observatörer kan vara olika ifall observatörerna rör sig relativt till varandra. Anta du sitter i ett tåg som står stilla på stationen och ser genom fönstret bara ett annat stillastående tåg (du ser inte marken, stationen osv.). Nu börjar ett av tågen röra på sig mycket mjukt så att man inte känner rörelsen. I detta fall kan du inte säga vilket tåg som rör på sig. Bara genom att jämföra rörelsen med marken, stationen eller annan referens kan du säga vilket tåg som rör på sig.

Hastigheten på en kropp som en observatör ser, är den hastighet relativt till observatörens egen hastighet (observatörens koordinatsystem), eller den *relativa hastigheten*.

Galilei transformation

Ifall origo för två koordinatsystem är på samma plats vid tidpunkten noll, får man ekvationerna som relaterar koordinaterna för de två systemen i figuren som en funktion av tiden

$$x = x' + ut \quad (31)$$
$$y = y' \quad (32)$$
$$z = z' \quad (33)$$
$$t = t' \quad (34)$$



Figur 7: Transformation av en punkt i koordinatsystemet x',y',z' som rör sig med hastigheten u relativt till stillastående koordinatsystemet x,y,z.

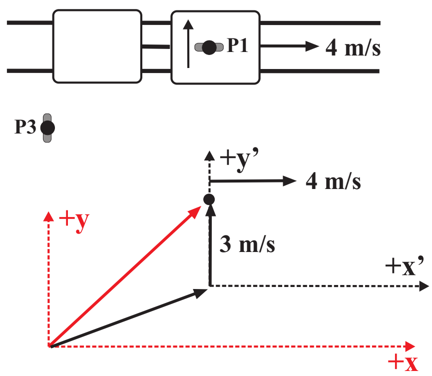
Dessa ekvationer kallas för *inversa Galilei transformationerna*. x' koordinatsystemet rör sig med hastigheten u relativt till koordinatsystemet x. Kortare kan man skriva

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}t \quad (35)$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u} \quad (36)$$

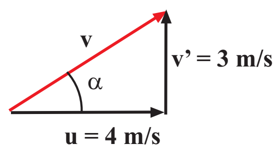
Exempel: Vi har tre personer, varav två av dem i ett tåg som rör sig. Person 1 (P1) går längs korridoren i tåget med 3 m/s i samma riktning som tåget. Person 2 sitter i samma vagn som P1 går i. Person 3 står utanför och ser tåget röra sig 4 m/s ifrån honom. Vad är den relativa hastigheten för P1 till P2 och P3?

Relativa hastighet för person 1 till person 2 är $\underline{\underline{3 \text{ m/s}}}$. I Ekv. (36) är v' = 3 m/s och u = 4 m/s, så att relativa hastigheten för person 1 till person 3 är 3 m/s + 4 m/s = $\underline{\underline{7 \text{ m/s}}}$.

Exempel: Ifall person 1 rör sig i sidled i tåget i stället för längs med tåget, så vad är den relativa hastigheten för person 1 till person 3 då?

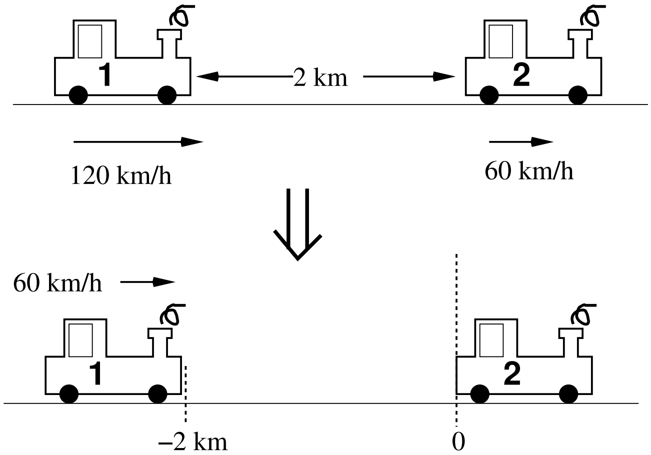


I detta fall måste man använda vektoregenskaperna i Ekv. (36), $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$, vilket ger $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}'^2 + \mathbf{u}^2} = \underline{\underline{5 \text{ m/s}}}$, och riktningen $tan(\alpha) = v'/u \Rightarrow \alpha \approx \underline{\underline{37^\circ}}$.



Exempel: En lokförare i ett tåg, vars fart är 120 km/h (relativt till marken), ser ett annat tåg *2 km* framför sig som åker i samma riktning på samma tågbana med en konstant hastighet 60 km/h (relativt till marken). Lokföraren börjar genast bromsa tåget. Vad är minimiretardationen som behövs för att tågen inte krockar?

Vi använder koordinatsystem som har origo i tåget 2 (60 km/h). I detta koordinatsystem rör sig tåg **1** med 60 km/h (V_0) mot tåget **2** som står stilla. Tåg **1** befinner sig först S_0 = -2 km från tåg 2.



Vi kallar tidpunkten just före tågen krockar för T, då sluthastigheten för tåg 1 måste vara noll

$$V_1(T) = 0 = V_0 + a \cdot T$$

där a är retardationen. Detta ger hur lång tid det tar innan tåget stannar

$$T = \frac{-V_0}{a} \tag{37}$$

Vid denna tidpunkt är också sträckan mellan tågen noll:

$$\begin{aligned} S(T) = 0 &= S_0 + V_0 T + \frac{1}{2} a T^2 \\ 0 &= S_0 - \frac{V_0^2}{a} + \frac{V_0^2}{2a} \\ 0 &= S_0 - \frac{V_0^2}{2a} \end{aligned}$$

där T från Ekv. (37) har satts in. Härifrån får man sedan minimiretardationen som behövs

$$a = \frac{V_0^2}{2S_0} = \frac{(60 \text{ km/h})^2}{2(-2 \text{ km})} = -900 \text{ km/h}^2 \approx \underline{\underline{-0.07 \text{ m/s}^2}}$$